reinventore

tradizione e rivoluzione nell'insegnamento delle scienze

L'orologio medievale

dal progetto Reinventore per la diffusione della cultura scientifica

Suggerimenti didattici per la Scuola Secondaria di 2° grado

* * *

- *Metodologia: i problemi alla Kapitza*
  - *Il peso trainante*
  - *Il momento angolare*
  - *Il sistema di ingranaggi e il raggio efficace*
  - *L'urto anelastico*

www.reinventore.it ®

Metodologia: i problemi alla Kapitza

Nella costruzione dell'orologio medievale (cfr. Scheda Istruzioni Esperimento Orologio) si procede per tentativi ed errori, ma si cerca anche qualche formula, si cerca di comprendere e interpretare le relazioni in gioco sulla scorta della meccanica classica. Questa attività si configura dunque come un "problema alla Kapitza"[1].

Negli anni 60 e 70 Pyotr Kapitza usava proporre uno specifico tipo di problema a livello di scuola secondaria, "per incoraggiare il pensiero indipendente".

"È molto importante avere laboratori e seminari e risolvere problemi che incoraggino il pensiero indipendente. Non sempre gli esercizi per gli studenti sono adatti a ciò. Per la maggior parte questi problemi forniscono allo studente dei dati da mettere nella formula giusta per produrre la risposta corretta. Il lavoro è trovare la formula corretta. Questo non è pensiero indipendente.
Specifico alcuni problemi a livello di scuola secondaria che spesso propongo agli studenti. (1) Stimare la potenza del motore di una pompa per fare un getto d'acqua sufficiente per spegnere un incendio al sesto piano. Con questo problema lo studente deve giudicare da sé l'altezza del palazzo, e dove mettere la pompa. Ogni studente può decidere in modo diverso su questi problemi, ed è facile vedere quale è meglio. (2) Stimare le dimensioni di una lente convessa che focalizzi la luce del sole in un punto dove si vuol far prendere fuoco. Lo studente deve trovare quanto calore è necessario, e quanto il fuoco della lente determina le sue dimensioni, e ancora una volta dovrà pensare a tutto il problema".

Si noti come gli esercizi proposti da Kapitza non differiscono nel contenuto da quelli che si propongono usualmente. Ma la prospettiva, legata al problema concreto e ampio, e alla sua soluzione, favorisce una presa molto più diretta sulle equazioni stesse, sul loro legame col mondo reale, sugli ordini di grandezza in gioco.

La descrizione quantitativa dell'orologio medievale può essere considerata un "problema alla Kapitza". Infatti, se ci accingiamo a descrivere l'orologio medievale, scomponendolo e analizzando le sue parti una alla volta, ci imbattiamo in problemi standard che però acquisiscono una prospettiva nuova per via dell'attività cui sono finalizzati.

Ne analizziamo quattro: il peso trainante, il momento angolare, il sistema di ingranaggi, l'urto anelastico.

---

[1] **Kapitsa**, Pyotr L. **1970**, *The General Principles of the Education of Present-day Youth and General Methods of Secondary-School Physics Teaching*, Proceedings of the International Congress on the Education of Teachers of Physics in Secondary Schools, Eger, Hungary, September 1970. A cura di Brown, Kedves e Wenham, 1971, *Teaching Physics: an Insoluble Task?* (The MIT Press Classic Series).

§1. il peso trainante

Uno dei primi problemi è il peso in caduta attaccato ad un filo che trascina tutto il sistema. Il caso più semplice è il trascinamento di una massa, senza attrito.

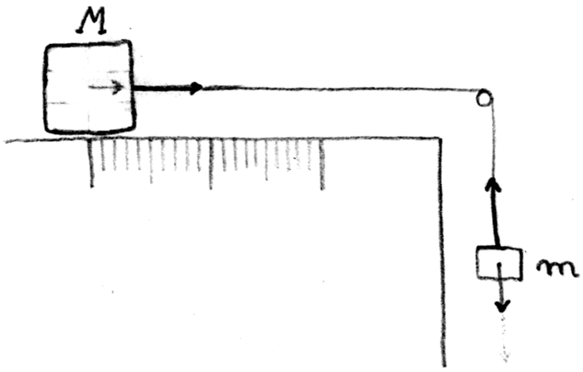


Figura 1 - problema del peso trainante

In questo problema abbiamo due oggetti, la massa m che cade e la massa M trascinata. Per ogni oggetto il moto (*dp/dt* o *ma* che dir si voglia) è determinato dalle forze agenti su di esso (F) secondo la legge di Newton, e pertanto per ognuno dei due oggetti scriviamo un'equazione del moto nella forma ma=F.

$$\text{per } m \text{ si ha} \qquad ma = mg - T \tag{1}$$

$$\text{per } M \text{ si ha} \qquad Ma = T \tag{2}$$

Il filo è teso e dunque la tensione ai due capi è la medesima: pertanto nelle due diverse equazioni compare la medesima T. Anche l'accelerazione a è la medesima nelle due equazioni, in quanto i due corpi formano un sistema che si muove rigidamente come un tutt'uno. Il fatto che i due corpi connessi dal filo formino un sistema, si esprime matematicamente combinando le due equazioni in un sistema

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = T \end{cases} \tag{3}$$

dove a e T sono le incognite. La soluzione del sistema ci dà

$$a = \frac{m}{m+M} g \tag{4}$$

La massa M, trascinata con questa accelerazione, partendo da ferma, impiega il seguente tempo a coprire la distanza s:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g}\frac{m+M}{m}} \tag{5}$$

Per esempio, nell'approssimazione $m \ll M$, si ha che t raddoppia quadruplicando M, o dividendo m per 4. Lo studio quantitativo dell'orologio può essere affrontato come una serie di variazioni su questo esercizio. È quanto viene fatto nei prossimi due paragrafi, prendendo in considerazione prima il momento angolare e poi un sistema di ingranaggi.

§2. il momento angolare

La prima variazione consiste nel sostituire alla massa da trascinare M un sistema come il nostro foliot, con una verga di raggio r e un foliot (senza massa) di lunghezza l al quale sono attaccate due masse M.

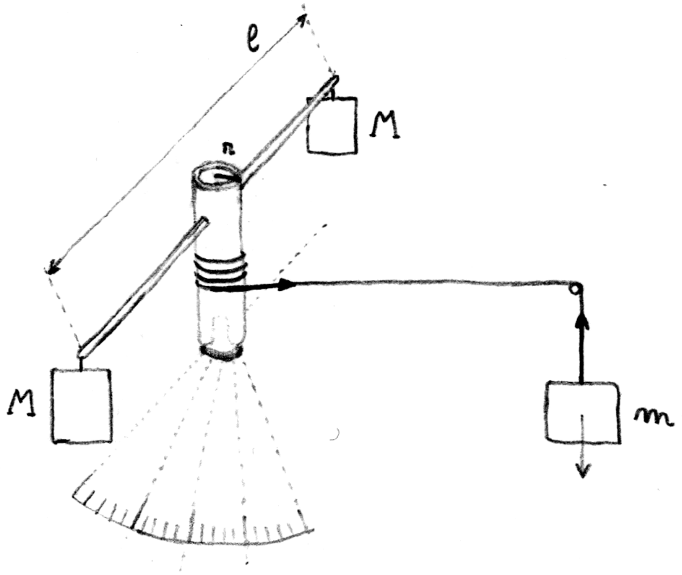


Figura 2 - problema del peso trainante, non una semplice massa M, ma due masse M attaccate a un foliot rotante di lunghezza l su una verga di raggio r.

L'equazione per la massa m è analoga all'eq.(1), mentre per il foliot rotante anziché la variazione di momento (dp/dt) determinata dalla forza F si considera la variazione di momento angolare (dL/dt) determinata dal momento torcente (Fr):

$$\frac{Ml^2}{2}\alpha = T \cdot r \tag{6}$$

Le due equazioni (1) e (6) sono legate: T è la medesima in entrambe, mentre l'accelerazione a e l'accelerazione angolare del foliot α sono collegate da

$$\alpha \cdot r = a \tag{7}$$

Si ha dunque il sistema

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ \dfrac{Ml^2}{2} a = T \cdot r^2 \end{cases} \tag{8}$$

Da cui

$$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}\frac{l^2}{r^2}} g \tag{9}$$

Il rapporto tra la lunghezza del foliot e il raggio della verga o dell'albero è tale da giustificare l'approssimazione di (9) sì da ottenere

$$a = 2\frac{m}{M}\frac{r^2}{l^2}g \quad \text{e dunque} \quad \alpha = 2\frac{m}{M}\frac{r}{l^2}g \tag{10}$$

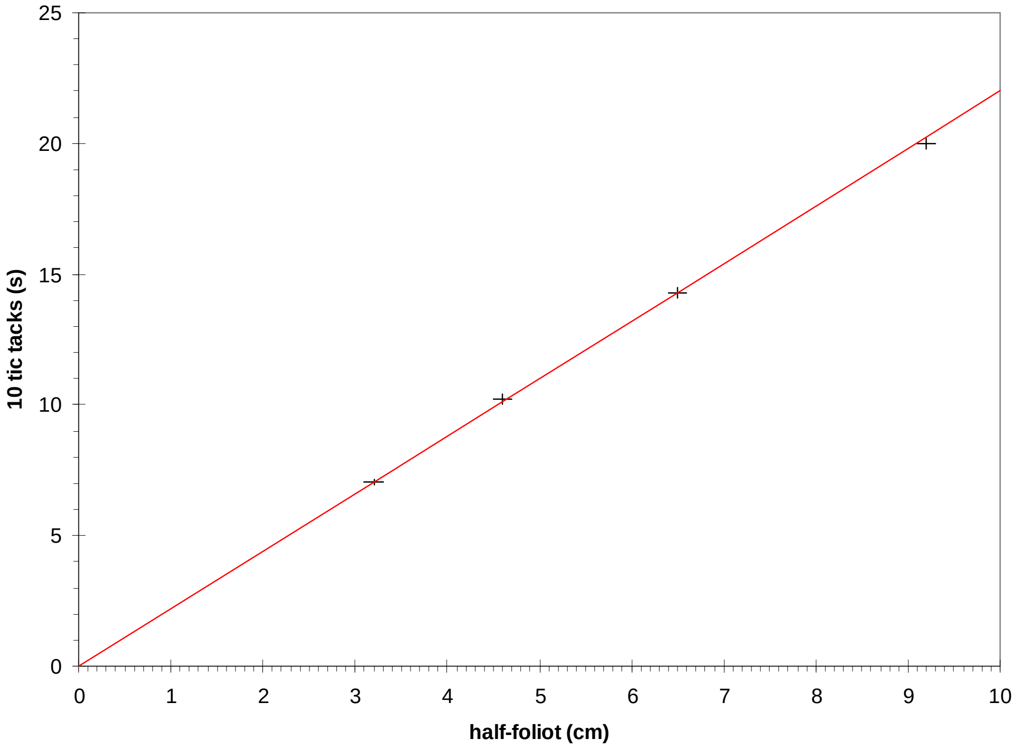
Data l'accelerazione angolare, possiamo stimare il tempo impiegato dal foliot a spazzare un angolo dato, θ, che poi corrisponderà all'angolo di scappamento. Si ha

$$t = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\theta}{g}\frac{M}{2m}\frac{l^2}{r}} = \sqrt{\frac{\theta}{g}\frac{M}{mr}} \cdot l \tag{11}$$

una relazione che esprime la linearità tra la distanza che separa le due masse appese e l'intervallo di tempo corrispondente: dimezzando la distanza si dimezza il tempo, raddoppiando la distanza si raddoppia il tempo, aumentando la distanza di un 10% si aumenta il tempo di un 10%.

Tale linearità tra t ed l caratterizza anche l'orologio costruito con materiali semplici, come si può verificare con rapide misure sperimentali. Un esempio è costituito dai dati in tabella e dal grafico in figura. La relazione è lineare, $t = 2{,}2\ l$.

posizione delle masse sul *foliot* l (cm)	Tempi parziali di 10, 20, 30, 40 ticchettii (sec)				tempo [medio] t (sec)
	10	20	30	40	
9.2 ± 0.1	19.9	39.9	59.8	80.0	20.0 ± 0.2
6.5 ± 0.1	14.3	28.5	42.7	57.3	14.3 ± 0.2
4.6 ± 0.1	10.2	20.4	30.6	41.0	10.2 ± 0.2
3.2 ± 0.1	7.1	14.1	21.1	28.1	7.0 ± 0.1



§3. il sistema di ingranaggi e il raggio efficace

Un'altra variazione sul tema che ci avvicina ulteriormente al nostro orologio si ottiene combinando una serie di ruote e ingranaggi privi di massa.

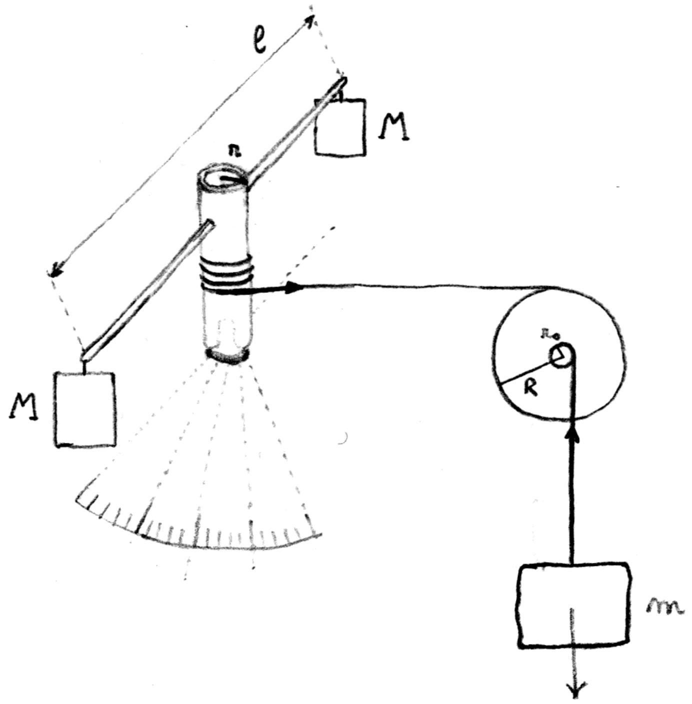


Figura 3 - problema del peso trainante, tramite un sistema di ingranaggi di raggi r_0 e R, due masse M attaccate a un foliot rotante di lunghezza l su una verga di raggio r. È una buona approssimazione del nostro orologio.

Gli ingranaggi possono essere considerati come leve i cui bracci sono i raggi, e pertanto la forza T_F che tira il foliot si ottiene demoltiplicando dalla tensione del filo dove è appesa la massa m:

$$T \cdot r_0 = T_F \cdot R \quad \text{ossia} \quad T_F = T \cdot \frac{r_0}{R} \tag{12}$$

Con questa avvertenza, il sistema si ottiene sostituendo (12) nella seconda equazione in (8):

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ \dfrac{Ml^2}{2} a = T \cdot \dfrac{r_0}{R} \cdot r^2 \end{cases} \tag{13}$$

Da cui infine si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{\theta}{g} \frac{M}{m} \frac{R}{r_0 \cdot r}} \cdot l \tag{14}$$

Con $\theta=\theta_E$ la formula esprime con buona approssimazione l'intervallo di tempo t_E necessario al compiersi di uno scappamento nell'orologio costruito a partire da materiali poveri qui presentato. La stessa formula dà anche la legge oraria $\theta=\theta(t)$ del foliot mentre viene spinto dalla corona, tra un urto e l'altro.

§4. l'urto anelastico

Le alterne collisioni tra le palette della verga e foliot e i denti della corona sono il modo per mezzo del quale l'orologio è regolarmente rallentato e il suo moto diventa periodico.
Per studiare le collisioni possiamo, come nel caso del trascinamento del peso, individuare dapprima un problema semplice. Ricorriamo dunque ad una collisione tra la massa M_1 (trascinata da m come nell'esercizio §1) che procede accelerando (rappresenta i denti della corona) e a velocità v si scontra con una massa M_2 che procede a velocità $-w$ (la paletta del verga-foliot).

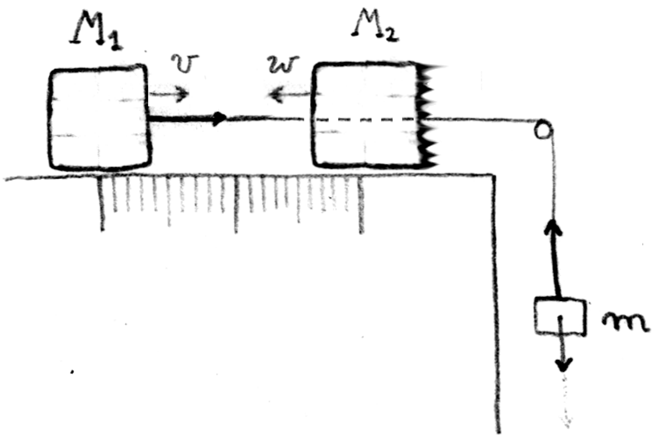


Fig. 4 – problema del peso trainante con urto sul peso trainato

Per ciascuno dei due oggetti possiamo scrivere la quantità di moto nella forma $p=mv$:

per M_1+m si ha $$p_1 = (M_1 + m)v \tag{15}$$

per M_2 si ha $$p_2 = -M_2 w \tag{16}$$

Trattandosi di un urto (conservazione della quantità di moto) che possiamo considerare anelastico (dopo l'urto i due oggetti procedono attaccati), la quantità di moto P' del sistema dopo l'urto è pari alla quantità di moto totale del sistema prima dell'urto. Cioè

$$P' = (M_1 + m)v - M_2 w \tag{17}$$

$$V' = \frac{(M_1 + m)v - M_2 w}{M_1 + m + M_2} \tag{18}$$

A seconda delle masse in gioco, quindi, si hanno tre casi differenti: le masse trascinate vengono rallentate dall'urto ma continuano a procedere nello stesso verso; il sistema si ferma per un istante dopodiché m riprende il trascinamento; M_2 spinge all'indietro il sistema fino a quando il trascinamento ha la meglio.
Naturalmente, le formule (15-18) possono venire modificate per tenere conto dei momenti angolari e degli ingranaggi.

In ogni caso, anche il problema semplice mostra, attraverso l'eq. 18, il ruolo delle collisioni nello stabilizzare il ciclo dell'orologio. Se infatti la corona (rappresentata da M_1+m)

trasferisse più impulso alle palette (M_2) rispetto a una quantità di "equilibrio", anche il successivo impatto frenante delle palette sarebbe più forte, rallentandola maggiormente. Se la corona invece trasferisse una minore quantità di impulso, l'impatto frenante successivo sarebbe più debole consentendole di acquisire maggiore impulso.

Per questo il foliot viene detto *regolatore*. Più volte, in quest'era di elettronica e *feedback*, l'orologio a verga e foliot è stato definito *"double feedback"* (a doppia retroazione).
Infatti, come è particolarmente evidente nell'ipotesi di urto anelastico, l'energia cinetica "persa", o impiegata nella collisione per frenare il moto della corona, era stata impartita al foliot dalla corona stessa.
Nell'ambito di questo esercizio, l'energia cinetica persa è data da

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\frac{(M_1+m)M_2}{(M_1+m)+M_2}(v+w)^2 \qquad (19)$$

Nel caso in cui M_2 spinga all'indietro il sistema si può anche calcolare di quanto viene fatta risalire m e la corrispondente energia potenziale. Anche questi calcoli possono avere una diretta verifica sperimentale.

La doppia retroazione, e il fatto di renderla visibile in modo semplice, rende l'orologio meccanico uno strumento didattico utile anche al di là della meccanica classica.
Lo scappamento può infatti essere considerato il primo di una serie di regolatori a retroazione che ebbero un grande impatto sulla tecnologia, come il regolatore di Watt, gli alettoni, il giroscopio e l'amplificatore elettronico[2]. L'orologio a verga e foliot è un oscillatore, al pari di un oscillatore elettronico o del cuore umano.

[2] **Bernstein**, Dennis S. **2002**, *Feedback Control: An Invisible Thread in the History of Technology*, IEEE Control Systems Magazine, vol. 22, n. 2, pp. 53-68, è una lezione ricca di referenze per ognuno dei dispositivi citati.