

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Fisica teorica 3

Editori Riuniti Edizioni Mir

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Meccanica quantistica

Teoria non relativistica

Editori Riuniti Edizioni Mir

Indice

<i>Prefazione alla terza edizione</i>	p. 10
<i>Dalla prefazione alla prima edizione</i>	11
<i>Alcune notazioni</i>	13
CAPITOLO I. CONCETTI FONDAMENTALI DELLA MECCANICA QUANTISTICA	
§ 1. <i>Principio di indeterminazione</i>	15
§ 2. <i>Principio di sovrapposizione</i>	21
§ 3. <i>Operatori</i>	23
§ 4. <i>Somma e prodotto di operatori</i>	29
§ 5. <i>Spettro continuo</i>	32
§ 6. <i>Limite classico</i>	37
§ 7. <i>Funzione d'onda e processo di misura</i>	39
CAPITOLO II. ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO	
§ 8. <i>Hamiltoniano</i>	43
§ 9. <i>Derivazione di operatori rispetto al tempo</i>	44
§ 10. <i>Stati stazionari</i>	46
§ 11. <i>Matrici</i>	50
§ 12. <i>Trasformazione di matrici</i>	55
§ 13. <i>Operatori in rappresentazione di Heisenberg</i>	58
§ 14. <i>Matrice densità</i>	59
§ 15. <i>Quantità di moto</i>	63
§ 16. <i>Relazioni di indeterminazione</i>	67
CAPITOLO III. EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER	
§ 17. <i>Equazione di Schrödinger</i>	72
§ 18. <i>Proprietà fondamentali dell'equazione di Schrödinger</i>	75
§ 19. <i>Densità di corrente</i>	79
§ 20. <i>Principio variazionale</i>	82
§ 21. <i>Proprietà generali del moto unidimensionale</i>	84

Dalla prefazione alla prima edizione

Il presente volume del Corso di fisica teorica è dedicato all'esposizione della meccanica quantistica. Data l'eccessiva ampiezza del materiale trattato, ci è parso opportuno di dividerlo in due parti. La prima parte, ora pubblicata, contiene la teoria non relativistica, mentre la teoria relativistica costituirà il contenuto della seconda parte.

Per teoria relativistica intendiamo, nel senso più largo, la teoria di tutti i fenomeni quantistici la cui dipendenza dalla velocità della luce è essenziale. In essa verrà perciò inclusa non soltanto la teoria relativistica di Dirac e le questioni con essa legate, ma anche tutta la teoria quantistica della radiazione.

Accanto ai fondamenti della meccanica quantistica, nel libro sono esposte anche numerose applicazioni, in misura notevolmente maggiore di quanto non si faccia usualmente nei corsi generali di meccanica quantistica. Non abbiamo considerato soltanto quelle questioni il cui studio avrebbe richiesto necessariamente anche un'analisi dettagliata dei dati sperimentali, ciò che inevitabilmente sarebbe uscito dall'ambito del libro.

Nel trattare i problemi concreti abbiamo teso sempre alla maggiore completezza. Abbiamo ritenuto perciò superflui i riferimenti ai lavori originali, limitandoci a indicarne gli autori.

Come nei volumi precedenti, ci siamo sforzati di esporre le questioni generali in modo da rendere più chiaro possibile il contenuto fisico della teoria per costruire sulle sue basi l'apparato matematico. Ciò appare in modo particolare nei primi paragrafi del libro dedicati alla spiegazione delle proprietà generali degli operatori quantistici. Contrariamente allo schema di esposizione usualmente adottato, che parte dai teoremi matematici sugli operatori lineari, noi deduciamo le proprietà matematiche richieste agli operatori e alle autofunzioni partendo dall'impostazione fisica del problema.

Non si può non notare che in molti corsi di meccanica quantistica l'esposizione è resa sostanzialmente più complicata rispetto ai lavori originali. Benché tali complessità vengano giustificate solitamente con motivi di generalità e di rigore, a un attento esame è facile vedere che sia l'uno che l'altra, in realtà, sono spesso illusori a un punto tale che una parte notevole di teoremi « rigorosi » è falsa. Poiché una tale complessità di esposizione appare a noi del tutto ingiustificata, abbiamo cercato, al contrario, di semplificare il più possibile e in molte cose ci siamo rifatti ai lavori originali.

Alcune nozioni veramente matematiche sono riportate alla fine del libro sotto forma di Appendice matematica in modo da non interrompere, per quanto possibile, l'esposizione nel testo con digressioni di calcolo. Questa appendice risponde ugualmente a scopi di consultazione.

Mosca, maggio 1947

L. D. Landau e E. M. Lifšic

Le autofunzioni di questo operatore debbono essere definite, secondo la regola generale, dall'equazione $q\Psi_{q_0} = q_0\Psi_{q_0}$, dove con q_0 sono indicati i valori concreti della coordinata per distinguerli dalla variabile q . Poiché questa uguaglianza può essere soddisfatta o per $\Psi_{q_0} = 0$ o per $q = q_0$, è ovvio che le autofunzioni che soddisfano la condizione di normalizzazione sono¹⁾

$$\Psi_{q_0} = \delta(q - q_0). \quad (5,17)$$

§ 6. Limite classico

La meccanica quantistica include in sé la meccanica classica come caso limite. Sorge la domanda: in che modo si realizza questo passaggio limite?

Nella meccanica quantistica l'elettrone è descritto da una funzione d'onda che determina i diversi valori della sua coordinata; per il momento, di questa funzione sappiamo solamente che essa è la soluzione di un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali. Nella meccanica classica, l'elettrone è considerato una particella materiale che si muove secondo una traiettoria completamente determinata dalle equazioni del moto. Una relazione in un certo senso analoga a quella esistente tra meccanica quantistica e meccanica classica ha luogo nell'elettrodinamica tra l'ottica ondulatoria e l'ottica geometrica. Nell'ottica ondulatoria le onde elettromagnetiche sono descritte dai vettori campo elettrico e campo magnetico i quali soddisfano un determinato sistema di equazioni differenziali lineari (equazioni di Maxwell). Nell'ottica geometrica, invece, si assume che la luce si propaghi secondo traiettorie determinate, dette raggi. Tale analogia permette di concludere che il passaggio dalla meccanica quantistica al limite costituito dalla meccanica classica si possa effettuare analogamente al passaggio dall'ottica ondulatoria all'ottica geometrica.

Ricordiamo in che modo quest'ultimo passaggio viene realizzato matematicamente (vedi vol. II, *Teoria dei campi*, § 53). Sia u una componente qualsiasi del campo nell'onda elettromagnetica. Essa può essere scritta nella forma $u = ae^{i\varphi}$, dove a è l'ampiezza e φ la fase reale (quest'ultima si chiama iconale in ottica geometrica). Il caso limite dell'ottica geometrica corrisponde a lunghezze d'onda piccole, il che si esprime matematicamente nel fatto che la fase φ subisce una grande variazione su piccole distanze; questo significa,

¹⁾ I coefficienti dello sviluppo di una funzione arbitraria Ψ secondo queste autofunzioni sono $a_{q_0} = \int \Psi(q) \delta(q - q_0) dq = \Psi(q_0)$. La probabilità dei valori della coordinata nell'intervallo dato dq_0 è, come si deve $|a_{q_0}|^2 dq_0 = |\Psi(q_0)|^2 dq_0$.

in particolare, che la fase può essere considerata grande in valore assoluto.

Conformemente a ciò, partiamo dal presupposto che al caso limite della meccanica classica corrispondano in meccanica quantistica funzioni d'onda della forma $\Psi = ak^{i\varphi}$, dove a è una funzione che varia lentamente, e φ prende valori grandi. Come è noto, in meccanica classica la traiettoria delle particelle può essere determinata a partire dal principio variazionale, secondo il quale la cosiddetta azione S di un sistema meccanico deve essere minima (principio di minima azione). In ottica geometrica, invece, il percorso dei raggi è determinato dal cosiddetto principio di Fermat secondo il quale il « cammino ottico » del raggio, cioè la differenza delle sue fasi nei punti finale e iniziale del cammino, deve essere minimo.

Partendo da questa analogia, possiamo affermare che la fase φ della funzione d'onda nel limite classico deve essere proporzionale all'azione meccanica S del sistema fisico considerato, cioè si deve avere $S = \text{costante } \varphi$. Il coefficiente di proporzionalità si chiama *costante di Planck* e si indica con la lettera h^1). Questa costante ha le dimensioni dell'azione (essendo φ adimensionale) e vale

$$h = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}.$$

In tal modo, la funzione d'onda di un sistema fisico *quasi-classico* ha la forma

$$\Psi = ae^{iS/h}. \quad (6,1)$$

La costante di Planck assume un'importanza fondamentale in tutti i fenomeni quantistici. La sua grandezza relativa (in confronto con le altre grandezze aventi le stesse dimensioni) determina il « grado di quantizzazione » di questo o di quel sistema fisico. Il passaggio dalla meccanica quantistica alla meccanica classica, caso limite corrispondente alle fasi grandi, può essere formalmente descritto come passaggio al limite h per $\rightarrow 0$ (analogamente il passaggio dall'ottica ondulatoria all'ottica geometrica corrisponde al passaggio al limite per lunghezze d'onda tendenti a zero, $\lambda \rightarrow 0$).

Abbiamo dunque precisato la forma limite della funzione d'onda, ma resta ancora da sapere in che modo essa sia legata con il moto classico secondo una traiettoria. Nel caso generale, il moto descritto dalla funzione d'onda non si riduce affatto al moto secondo una traiettoria determinata. Il suo legame con il moto classico consiste nel fatto che, se a un certo istante iniziale, la funzione d'onda e , di conseguenza, la distribuzione delle probabilità delle coordinate

¹) Essa è stata introdotta in fisica da M. Planck nel 1900. La costante h che useremo dappertutto in questo volume è, propriamente parlando, la costante di Planck h divisa per 2π (notazione di Dirac).

sono date, questa distribuzione « si sposterà » successivamente nel modo determinato dalle leggi della meccanica classica (per maggiori dettagli su questo problema vedi la fine del § 17).

Per ottenere un moto secondo una traiettoria determinata, bisogna partire da una funzione d'onda particolare che è sensibilmente differente da zero soltanto in una regione molto piccola dello spazio (il cosiddetto *pacchetto d'onda*); si possono far tendere a zero le dimensioni di questa regione insieme con \hbar . Si può affermare allora che nel caso quasi-classico il pacchetto d'onda si sposterà nello spazio secondo la traiettoria classica della particella.

Infine, gli operatori della meccanica quantistica debbono ridursi, al limite, semplicemente alla moltiplicazione per la corrispondente grandezza fisica.

§ 7. Funzione d'onda e processo di misura

Ritorniamo al processo di misura le cui proprietà sono state qualitativamente esaminate nel § 1, e vediamo in che modo queste proprietà siano legate con l'apparato matematico della meccanica quantistica.

Consideriamo un sistema costituito da due parti: lo strumento classico e l'elettrone (considerato come oggetto quantistico). Il processo di misura consiste nel fatto che queste due parti entrano in interazione, e in seguito a questa lo strumento passa dal suo stato iniziale ad un altro stato; e da questa variazione noi possiamo giudicare lo stato dell'elettrone. Gli stati dello strumento si distinguono per i valori di una grandezza fisica (o di più grandezze) che lo caratterizzano, ossia per le « indicazioni dello strumento ». Indichiamo convenzionalmente con g questa grandezza e con g_n i suoi autovalori; essendo lo strumento classico, gli autovalori assumono, in generale, un insieme continuo di valori, ma noi supporremo che lo spettro sia discreto, esclusivamente allo scopo di semplificare le formule che seguono. La descrizione dello stato dello strumento viene realizzata dalle funzioni d'onda quasi-classiche che indicheremo con $\Phi_n(\xi)$, dove l'indice n corrisponde all'« indicazione » g_n dello strumento e ξ esprime convenzionalmente l'insieme delle sue coordinate. Il carattere classico dello strumento si rivela nel fatto che, in ogni istante dato, si può affermare con certezza che esso si trova in uno degli stati noti Φ_n con un valore determinato della grandezza g ; per un sistema quantistico, una tale affermazione sarebbe, beninteso, erronea.

Supponiamo che $\Phi_0(\xi)$ sia la funzione d'onda dello stato iniziale dello strumento (prima della misura) e $\Psi(q)$ una qualsiasi funzione d'onda iniziale normalizzata dell'elettrone (q indica le sue coordinate). Queste funzioni descrivono indipendentemente lo stato dello

strumento e quello dell'elettrone, e, di conseguenza, la funzione d'onda iniziale dell'intero sistema è il prodotto

$$\Psi(q) \Phi_0(\xi). \quad (7,1)$$

Successivamente lo strumento e l'elettrone entrano in interazione. Applicando le equazioni della meccanica quantistica, si può, in linea di principio, seguire le variazioni della funzione d'onda del sistema con il tempo. Dopo il processo di misura essa, naturalmente, non sarà più un prodotto di funzioni di ξ e di q . Sviluppandola secondo le autofunzioni Φ_n dello strumento (che costituiscono un sistema completo di funzioni), otterremo una somma della forma

$$\sum_n A_n(q) \Phi_n(\xi), \quad (7,2)$$

dove $A_n(q)$ sono certe funzioni di q .

Ora entrano in scena la « natura classica » dello strumento e il duplice ruolo della meccanica classica quale caso limite e, al tempo stesso, quale fondamento della meccanica quantistica. Come è stato già indicato, dato il carattere classico dello strumento, la grandezza g (« indicazione dello strumento ») ha un valore determinato in ogni istante. Questo fatto ci permette di affermare che lo stato del sistema strumento + elettrone sarà descritto, in realtà, dopo la misura, non dall'intera somma (7,2), bensì solamente da un termine corrispondente all'« indicazione » g_n dello strumento:

$$A_n(q) \Phi_n(\xi). \quad (7,3)$$

Ne risulta che $A_n(q)$ è proporzionale alla funzione d'onda dell'elettrone dopo la misura. Questa non è ancora una vera e propria funzione d'onda, cosa che segue già dal fatto che la funzione $A_n(q)$ non è normalizzata. Essa contiene sia informazioni sulle proprietà dello stato dell'elettrone dopo la misura sia la probabilità di avere la n -esima « indicazione » dello strumento determinata dallo stato iniziale del sistema.

In virtù della linearità delle equazioni della meccanica quantistica, il legame tra $A_n(q)$ e la funzione d'onda iniziale dell'elettrone $\Psi(q)$ si esprime, in generale, con un operatore integrale lineare

$$A_n(q) = \int K_n(q, q') \Psi(q') dq' \quad (7,4)$$

col nucleo $K_n(q, q')$ che caratterizza un dato processo di misura.

Noi supponiamo che la misura considerata sia tale da condurre in definitiva, a una descrizione completa dello stato dell'elettrone. In altri termini (vedi § 1), nello stato originatosi le probabilità per tutte le grandezze debbono essere indipendenti dallo stato precedente dell'elettrone (prima della misura). Ciò significa matematicamente che la forma delle funzioni $A_n(q)$ deve essere determinata dal processo

di misura stesso e non deve dipendere dalla funzione d'onda iniziale dell'elettrone $\Psi(q)$.

A_n deve quindi avere la forma

$$A_n(q) = a_n \varphi_n(q), \quad (7,5)$$

dove φ_n sono determinate funzioni che supporremo normalizzate, e dove soltanto le costanti a_n dipendono dallo stato iniziale $\Psi(q)$. Nella relazione integrale (7,4) a ciò corrisponde un nucleo $K_n(q, q')$ che si scompone in prodotto di funzioni soltanto di q e di q' :

$$K_n(q, q') = \varphi_n(q) \Psi_n^*(q'), \quad (7,6)$$

la relazione lineare tra le costanti a_n e la funzione $\Psi(q)$ è data allora da formule del tipo

$$a_n = \int \Psi(q) \Psi_n^*(q) dq, \quad (7,7)$$

dove $\Psi_n(q)$ sono determinate funzioni dipendenti dal processo di misura.

Le $\varphi_n(q)$ sono le funzioni d'onda normalizzate dell'elettrone dopo la misura. Si vede dunque che il formalismo matematico della teoria riflette la possibilità di ottenere attraverso un processo di misura lo stato dell'elettrone descritto da una determinata funzione d'onda.

Se la misura è fatta su un elettrone con funzione d'onda $\Psi(q)$ data, le costanti a_n hanno un senso fisico semplice: conformemente alle regole generali, $|a_n|^2$ è la probabilità che la misura dia il risultato n -esimo. La somma delle probabilità di tutti i risultati è uguale all'unità:

$$\sum_n |a_n|^2 = 1. \quad (7,8)$$

La validità delle formule (7,7) e (7,8) per una funzione arbitraria $\Psi(q)$ (normalizzata) equivale (cfr. § 3) all'affermazione che una funzione arbitraria $\Psi(q)$ può essere sviluppata secondo le funzioni $\Psi_n(q)$. Ciò significa che le funzioni $\Psi_n(q)$ formano un insieme completo di funzioni normalizzate ed ortogonali.

Se la funzione d'onda iniziale dell'elettrone coincide con una delle funzioni $\Psi_n(q)$, è evidente allora che la costante corrispondente a_n sarà uguale all'unità, mentre saranno nulle tutte le altre. In altri termini, la misura fatta sull'elettrone nello stato $\Psi_n(q)$ darà con certezza un risultato determinato (1^n -esimo).

Tutte queste proprietà delle funzioni $\Psi_n(q)$ provano che esse sono le autofunzioni di una grandezza fisica che caratterizza l'elettrone (indichiamola con f) e che si può parlare della misura considerata come della misura di questa grandezza.

È molto importante il fatto che le funzioni $\Psi_n(q)$ non coincidono, in generale, con le funzioni $\varphi_n(q)$ (queste ultime non sono, in generale, mutuamente ortogonali e non costituiscono un sistema di autofunzioni di un operatore). Questa circostanza esprime, in primo luogo, il fatto che i risultati del processo di misura non possono essere riprodotti in meccanica quantistica. Se l'elettrone si trovava nello stato $\Psi_n(q)$ la misura della grandezza f effettuata su di esso dà con certezza il valore f_n . Dopo la misura l'elettrone verrà però a trovarsi in uno stato $\varphi_n(q)$, differente da quello iniziale, dove la grandezza f non ha alcun valore determinato. Così, sottoponendo l'elettrone a due misure successive, la seconda volta otterremo per f' un valore non coincidente con il risultato della prima misura¹⁾. Per prevedere (nel senso del calcolo della probabilità) il risultato di una successiva misura, quando è noto il risultato della prima, bisogna prendere dalla prima misura la funzione d'onda $\varphi_n(q)$ dello stato originato da questa misura, e dalla seconda la funzione d'onda $\Psi_n(q)$ dello stato di cui si cerca la probabilità. Ciò vuol dire quanto segue. Dalle equazioni della meccanica quantistica ricaviamo la funzione d'onda $\varphi_n(q, t)$ che al momento della prima misura è uguale a $\varphi_n(q)$. La probabilità dell' m -esimo risultato nella seconda misura, effettuata nell'istante t , è data dal quadrato del modulo dell'integrale $\int \varphi_n(q, t) \Psi_m^*(q) dq$.

Noi vediamo che il processo di misura presenta in meccanica quantistica un duplice aspetto: il suo ruolo rispetto al passato e al futuro è diverso. Rispetto al passato, la misura verifica le probabilità dei diversi risultati possibili che si possono prevedere partendo dallo stato creato dalla misura precedente. Rispetto al futuro, essa crea un nuovo stato (vedi anche § 44). Il processo di misura è quindi, per sua natura, profondamente irreversibile.

Questa irreversibilità ha un'importanza fondamentale. Come vedremo più avanti (vedi § 18), le equazioni fondamentali della meccanica quantistica godono di per sé di simmetria rispetto al cambiamento di segno del tempo; sotto questo aspetto, la meccanica quantistica non differisce dalla meccanica classica. L'irreversibilità del processo di misura introduce però nei fenomeni quantistici un'inequivalenza fisica delle due direzioni del tempo, cioè porta ad una differenziazione tra futuro e passato.

¹⁾ La non riproducibilità delle misure ammette però un'importante eccezione: la sola grandezza la cui misura può essere iterata è la coordinata. Due misure della coordinata dell'elettrone, effettuate in un intervallo di tempo sufficientemente breve, debbono dare valori vicini; il contrario significherebbe che l'elettrone ha una velocità infinita. Dal punto di vista matematico, ciò è dovuto al fatto che la coordinata commuta con l'operatore dell'energia d'interazione dell'elettrone con lo strumento che è (nella teoria non relativistica) una funzione solamente delle coordinate.