



UNIVERSITA' DI UDINE

Unità di Ricerca in Didattica della Fisica

AVVICINARSI ALLA TEORIA DELLA FISICA QUANTISTICA

a cura di:

Marisa Michelini, Alberto Stefanel

*una proposta per la didattica sviluppata da
precedenti lavori a cui hanno partecipato anche:*

Giancarlo Ghirardi

Renata Grassi

Renzo Ragazzon

Lorenzo Santi

UNIVERSITÀ DI UDINE

UNITÀ DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA FISICA

Impaginazione:

L. Komardinova

Stampa:

Litho Stampa

autunno 2004

© Copyright 2004

UNIVERSITÀ DI UDINE

Unità di Ricerca in Didattica della Fisica

E-mail: gei@fisica.uniud.it

Il presente lavoro è stato realizzato nell'ambito
del Progetto di Rilevanza Nazionale PRIN del MIUR

*Innovazione e formazione in fisica con l'uso
delle nuove tecnologie in classi a distanza.*

*L'educazione scientifica di base e le basi
culturali della meccanica quantistica:
due sfide nella formazione dell'insegnante.*

prot. 2001021239_004

Presentazione

La fisica dell'ultimo secolo non è ancora entrata a far parte della prassi didattica nell'insegnamento secondario. Sono tuttavia numerose esperienze effettuate a questo scopo: esse sono impostate in modo diverso ed utilizzano le metodologie più varie.

Esse hanno come motivazione di fondo il riconoscimento che è importante far entrare nella formazione di un cittadino di media cultura quegli elementi metodologici, che si possono riassumere nel modo quantistico di pensare, oggi paradigma di riferimento e fondamento teorico per la gran parte delle discipline che indagano la natura.

Il nuovo paradigma concettuale della fisica quantistica è quasi sempre al centro dell'attenzione di queste sperimentazioni. Lo è invece solo raramente il suo grande contributo al pensiero teoretico.

Un approccio di tipo storico critico o per discussione di esperimenti cruciali, molto diffuso a livello di scuola secondaria e nei libri di testo, per quanto motivante, affascinante e culturalmente significativo, rischia per mancanza di tempo e requisiti formali, di ridursi ad una trattazione quasi discorsiva soltanto della vecchia teoria dei quanti.

Un approccio ondulatorio può essere condotto in modo rigoroso solo con un apparato matematico difficilmente padroneggiato da studenti di scuola secondaria superiore. Alcune simulazioni al computer, superano almeno in parte le difficoltà del formalismo, ma non risolvono il problema di assunzioni di fondo, che è difficile costruire e motivare in modo semplice e che pertanto devono essere accettate come una sorta di assiomi.

Per costruire una proposta organica e rigorosa allo studio della fisica quantistica nel contesto del suo formalismo, che ne rappresenta anche i significati, e contribuire alla formazione al pensiero teoretico in fisica abbiamo effettuato diverse ricerche, che hanno prodotto una proposta culturale, un percorso e diversi materiali di supporto [1-6]. Essi sono stati oggetto di sperimentazione didattica a vari livelli di approfondimento e completezza [7-10]. Sono inoltre stati realizzati ambienti di risorse in web per l'innovazione didattica basata su percorsi differenziati, fondati in modo organico e coerente con la rigorosa impostazione culturale messa a punto [11-14]. È stata infine effettuata una ricerca per la formazione iniziale degli insegnanti nell'ambito del progetto PRIN del MIUR 2001-2003, prot. 2001021239_004 *Innovazione e Formazione in Fisica con l'uso delle nuove tecnologie in classe e a distanza (Fisica per la Formazione Culturale (FFC), sottoprogetto L'educazione scientifica di base e le basi culturali della meccanica quantistica: due sfide nella formazione degli insegnanti*.

Questo libretto contiene l'esito di questo lavoro in forma di percorso didattico.

Avvicinarsi alla teoria della meccanica quantistica

attraverso

Il principio di sovrapposizione

La polarizzazione
come proprietà
quantistica della luce

SEMPlici
ESPERIMENTI
IDEALI

Il riconoscimento di
uno **stato** associato ad
una proprietà fisica

Come si riconoscono
ed individuano
proprietà incompatibili

Fotoni, polaroid, cristalli birifrangenti

La legge di Malus per
preparare lo **stato**

Spazi vettoriali
(dimensione 2)

Diffrazione di particelle

Teoria
quantistica
della misura

La descrizione
dei
macrogetti

Non
località

proiettore

autovalori

operatore

Esso vuole essere un contributo per gli insegnanti all'introduzione della fisica quantistica nei curricula secondari. È incentrato sul percorso didattico le cui basi [1- 4] e il cui sviluppo [5-7, 11,12,14] sono state oggetto di ricerche precedenti. È stato sperimentato in classi pilota [8-10] e nella formazione iniziale degli insegnanti di scuola secondaria [13,14].

È strutturato in quattro parti.

Nella prima vengono discusse le scelte in merito ad impostazione disciplinare, approccio didattico, strategia e metodi, mappa del mondo in cui si colloca la proposta stessa. La nostra attenzione si rivolge alle idee della teoria, a quelle scelte formali che determinano il significato degli enti, secondo l'impostazione tracciata da Dirac [15] e ripresa da altri autori [16-19]. Le scelte a livello didattico si incentrano sui contenuti concettuali fondanti della teoria, selezionati per il bagaglio formativo di ogni persona di cultura.

I contesti fenomenologici di riferimento sono quelli dell'ottica fisica, in cui è possibile utilizzare trattazioni matematiche accessibili a studenti della scuola superiore: l'interferenza e la diffrazione, la polarizzazione.

Nella seconda parte viene presentato il "filo", che costituisce il percorso didattico vero e proprio. Esso viene proposto in forma scarna, facendo uso di schemi, figure per offrire all'insegnante una base di lavoro facilmente riadattabile per una proposta in classe. Esso è caratterizzato da una articolazione dei concetti nel contesto specifico della fenomenologia della polarizzazione, che si presta a una semplice esplorazione sperimentale quantitativa e interpretazione in termini di interazioni di fotoni con la materia.

Il principio di sovrapposizione viene discusso prima sul piano qualitativo e poi in termini formali nel contesto di spazi reali. Ad un primo livello di formalizzazione viene proposta anche la riflessione sull'associazione di operatori lineari a osservabili fisiche. I concetti introdotti nel caso di sistemi rappresentabili in spazi vettoriali bidimensionali vengono infine generalizzati al caso di stati rappresentabili in spazi a più dimensioni, utilizzando la rappresentazione dello stato attraverso la funzione d'onda e il concetto di ortogonalità fra stati.

Nella terza parte viene illustrato come è possibile determinare l'evoluzione temporale della funzione d'onda con il metodo dei cammini di Feynman [20, 21].

A corredo del percorso, nella quarta ed ultima parte di questo libretto, viene presentato un insieme selezionato di 4 esperimenti sulla polarizzazione, che costituiscono una proposta minimale attraverso cui contestualizzare la nostra proposta didattica.

Riferimenti bibliografici

- 1 G. C. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *A Fundamental Concept in Quantum Theory: The Superposition Principle*, in *Thinking Physics for Teaching*, Aster, Plenum Publishing Corporation, p. 329, 1995.
- 2 G. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *The linear superposition principle and non classical features of microphenomena, short contribute in Teaching the Science of Condensed Matter and New Materials*, GIREP-ICPE Book, Forum , 1996.
- 3 G. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *Introduzione delle idee della fisica quantistica e il ruolo del principio di sovrapposizione lineare*, La Fisica nella Scuola, XXX, 3 Sup., Q7, p.46-57, 1997.
- 4 A. STEFANEL, *Un'esperienza sul campo di introduzione della fisica quantistica nella scuola secondaria superiore*, La Fisica nella Scuola, XXX, 3 sup., Q7, 1997.
- 5 M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Una proposta operativa a confronto con diversi approcci alla meccanica quantistica nella scuola secondaria superiore*, La Fisica nella Scuola, XXXII, 3, p. 196, 1999.
- 6 R. RAGAZZON, *From photons and polaroids to the modern formalism of Quantum Mechanics: let the indices run*, WIRESRIPT Magazine – Education, May 2000, <http://www.wirescript.com>.
- 7 M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Proposal for quantum physics in secondary school*, Phys. Educ . 35 (6), p.406, 2000.
- 8 A. STEFANEL, *Interazione di fotoni con polarizzatori e cristalli birifrangenti per l'introduzione del concetto di stato quantico*, La Fisica nella Scuola, XXXIV, 1 supplemento, 2001.
- 9 M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Quantum Physics as a way of thinking: an educational proposal*, in *Phytec 2000*, Elsevier, Paris, p.479, 2001.
- 10 M. MICHELINI, L. SANTI, A. STEFANEL, G. MENEGHIN, *A resource environment to introduce quantum physics in secondary school*, Proceedings International MPTL-7, <http://informando.infm.it/MPTL/>, 2002.
- 11 A. STEFANEL, M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, *Mecaniche cuantistiche te scuole secondary - Quantum Physics si secondary school*, Friulan journal of sciences – reserches, 3, p. 9-19, 2003.
- 12 M. COBAL, F. CORNI, M. MICHELINI, L. SANTI, A. STEFANEL, *A resource environment to learn optical polarization*, in *Physics in new fields*, Girep International Conference proceedings, Lund, 2002.
- 13 M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Experimenting a MIF on Quantum Physics for pre-service Teacher Training*, in selected paper of the Second INTERNATIONAL GIREP Seminar on Quality Development in Teacher Education and Training, Udine 1 - 6 September 2003.
- 14 A. STEFANEL, M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, *Proposal for quantum physics learning in secondary school*, selcted paper of the VIII Inter-American Conference on Physics Education, Teaching Physics for the Future, C-11, SCdF, Havana, Cuba, 2003.
- 15 P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Calderon Press, 1958.
- 16 J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Menlo Park, California, Benjamin/Cummings, 1985.
- 17 B. d'Espagnat, *Conceptual foundation of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Menlo Park, California, Benjamin 1976.
- 18 A.P. French, *Experimental Bases for Quantum Ideas*, in A. Loria, P. Thomsen, ed., *Seminar on the Teaching of Physics in Schools 2*, Gyldendal, 1975, 258-272.
- 19 G. Pospiech, *Uncertainty and complementarity: the heart of quantum physics*, Physics Education 35 (6) November 2000, 393-399; G Pospiech, *a modern course in quantum physics for teacher education*, in L. Xingkai, Z. Kaihua, *Turning the challenge into opportunities*, Guangxi Normal University Press, Guilin, China, 244-248, 2000.
- 20 R. FEYNMAN, QED, *La strana teoria della luce*, ADELPHI, 1985.
- 21 E.F. TAYLOR, S. VOKOS, J.M. O'MEARA, *Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory*, Computers in Physics 12, p.190, 1998.

AVVICINARSI ALLA TEORIA DELLA MECCANICA QUANTISTICA - PARTE I INDICAZIONI GENERALI

Obiettivi generali

Ci si propone in questa sede di fare i primi passi verso una visione sintetica della fisica quantistica ed il formalismo che la sostiene. Si tratta pertanto di un'introduzione delle idee della fisica quantistica a partire dal riconoscimento del ruolo del principio di sovrapposizione per la comprensione dello stato quantico.

Motivazioni e scelte rispetto al quadro concettuale.

Le idee che costituiscono il fondamento della fisica quantistica fondano una nuova meccanica: la meccanica quantistica. Esse modificano in modo sostanziale, spesso antiintuitivo, quelle della meccanica classica e rappresentano un nuovo modo di guardare la realtà, capace di interpretare i fenomeni a livello microscopico.

Dopo quasi un secolo dalla sua formulazione è sempre più vasto il suo impiego in tutta la ricerca scientifica, in particolare nella scienza dei materiali, nella fisica atomica e delle particelle elementari. Si sente la necessità che essa diventi parte integrante del patrimonio culturale di tutti: essa viene infatti prevista nell'insegnamento della fisica secondaria dei Paesi europei. Il problema di come impostarne la didattica è però ancora aperto sia per le difficoltà concettuali, sia per le difficoltà formali intrinseche nel profondo cambiamento del modo in cui interpretare la fenomenologia [1]. Nel quadro di un'ampia offerta divulgativa di aspetti sorprendenti del modo di pensare quantistico, si sente la necessità di una trattazione per la didattica che permetta di riconoscere l'unitarietà del quadro concettuale: le idee teoriche di fondo, con il formalismo, che dà loro un ruolo preciso.

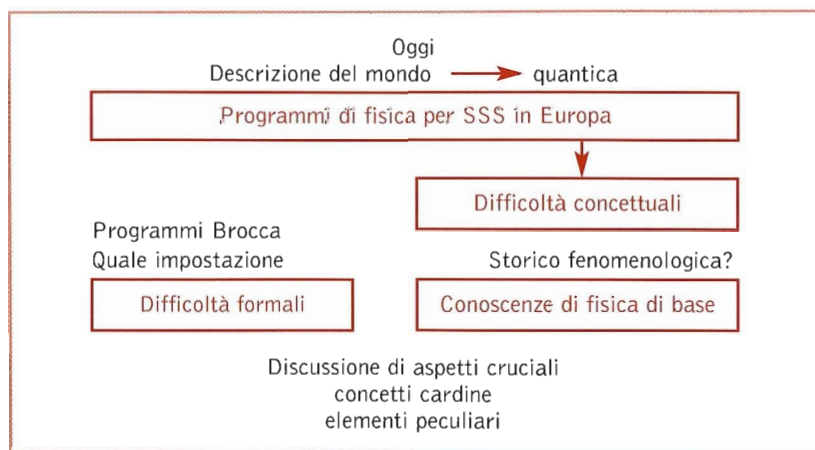


Fig. 1

Il quadro riassume le motivazioni che stanno alla base delle nostre proposte.

[1] Molto variegato in peso e in contenuti è soprattutto il materiale a livello secondario. Per un quadro delle possibili impostazioni è ancora attuale il volume: A. Loria, P. Thomsen, Seminar on the teaching of physics in schools 2, GIREP, Gylndental, 1975. Una discussione interessante e più aggiornata in italiano si trova nei quaderni Q3 (1992) e Q7 (1997) de La Fisica nella Scuola. Completa il quadro delle proposte il seguente lavoro di grande interesse generale e fondante dell'approccio basato sulla ricostruzione razionale dei concetti: E. Fabri, "Come introdurre la fisica quantistica nella scuola secondaria superiore", La Fisica nella Scuola, XXIX, 1 suppl. (1996), p. 63.

Impostazione (percorso concettuale)

L'approccio ondulatorio costituisce la modalità più rigorosa con cui avvicinarsi gradualmente alla nuova meccanica, ma si appoggia su prerequisiti di competenza in fisica e in matematica non comunemente presenti a livello secondario; inoltre richiede un processo lungo e attento sia all'analisi formale sia a quella concettuale per processi analogici di graduale avvicinamento al nuovo modo di guardare: resta in ombra la sintetica potenzialità del formalismo vettoriale, che fonda la nuova meccanica.

Il passaggio dal continuo al discreto nella rappresentazione delle grandezze fisiche è uno dei fatti più rilevanti della meccanica quantistica. La fisica dei quanti è pertanto un approccio affascinante e motivante, che consente una ricostruzione razionale delle idee, che hanno portato alla quantizzazione delle principali grandezze descrittive dello stato dei sistemi microscopici. Si può effettuare mediante un'analisi storica dei problemi irrisolti e/o degli esperimenti classicamente non spiegabili [2]. Comporta tuttavia per alcuni aspetti una trattazione a livello fenomenologico, che lascia sul piano qualitativo ipotesi, che richiederebbero argomentazioni puntuali e giustificazioni formali. La dimensione descrittiva appare insoddisfacente sul piano didattico e non può essere assunta come modalità di costruzione di una conoscenza di base in tale campo, se non viene completata dalle principali idee su cui la meccanica quantistica si fonda. A tale scopo serve produrre consapevolezza degli assunti di riferimento della nuova meccanica e offrire qualche indicazione sul formalismo in essa adottato, perché esso assume in meccanica quantistica un ruolo quasi concettuale.

La scelta che si fa in questa sede punta all'introduzione della teoria, mediante la trattazione di concetti cardine e di elementi peculiari della meccanica quantistica. Si tratta di un approccio alle idee teoriche, a quelle scelte formali che determinano il significato degli enti [3].

Essa comporta:

- a) sul piano disciplinare:
di affrontare subito il concetto di stato quantico e il principio di sovrapposizione.
- b) sul piano didattico:
di far riferimento ad una fenomenologia che evidenzi in modo semplice proprietà descritte quantisticamente da uno stato.

[2] Si unificano qui tre impostazioni diverse (storica, per problemi, di ricostruzione razionale delle idee di fondo) che focalizzano l'attenzione sul riconoscimento della natura discreta di alcune principali grandezze descrittive degli stati e dei processi microscopici. Come la fisica dei quanti sia stata necessaria, ma non possa essere rappresentativa della meccanica quantistica è descritto in vari lavori di storia della fisica e in scritti divulgativi. Ne citiamo tre: B. Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantistica*, Torino, Boringhieri, 1980; Toraldo di Francia, *Le cose e i loro nomi*, Bari, Laterza, 1986; E. Bellone, *Caos e armonia*, Torino, Utet, 1990.

[3] Ciò implica un approccio ai sistemi quantistici secondo l'impostazione di Dirac (P. A. M. Dirac, *I principi della meccanica quantistica*, Torino, Boringhieri, 1959) con quelle belle estensioni proposte da Sakurai (J. J. Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli, Bologna, 1996).

Si propone la fenomenologia della polarizzazione, come proprietà quantistica della luce, da analizzare mediante semplici esperimenti ideali di interazione dei singoli fotoni con polaroid e materiali birifrangenti (cristalli di calcite).

In questo quadro, esaminando situazioni specifiche con il bagaglio culturale di uno studente di scuola secondaria, si possono discutere a fondo nuclei fondanti della meccanica quantistica, come il concetto di stato ed indeterminismo quantico, proprietà incompatibili, non località e processo di misura. Il comportamento dei fotoni polarizzati linearmente nell'interazione con polaroid permette il riconoscimento del principio di indeterminazione e dell'indeterminismo quantistico.

L'interazione dei fotoni con cristalli birifrangenti fa riconoscere come lo stato di polarizzazione a 45° sia associato al vettore somma degli stati ortogonali componenti e non possa essere considerato una loro miscela statistica. Essa permette di evidenziare anche l'impossibilità di attribuire un preciso cammino ai singoli fotoni, oppure, secondo teorie alternative, di dover ammettere un comportamento non classico dei fotoni nelle interazioni. Dagli esiti degli esperimenti ideali si introduce il concetto di proiettore, con il quale si costruiscono il concetto di operatore e quello di grandezza misurabile come soluzione agli autovalori. Il problema della teoria quantistica della misura, della descrizione dei macrogetti e la non località vengono proposti nello stesso contesto, con esemplificazioni nella fenomenologia della diffrazione di particelle ed analogie nel mondo macroscopico. Fig. 2.



Fig. 2
I punti nodali della
nostra proposta

Approccio

L'approccio attraverso la legge di Malus permette il riconoscimento di uno stato associato ad una proprietà fisica e consente di evidenziare come l'interazione della luce con polaroid svolge il doppio ruolo di preparazione e misura rispetto ad uno stato di polarizzazione dei fotoni.

Strategia didattica

L'analisi fenomenologica di semplici situazioni sperimentali esplorate sul piano operativo ed analizzate in termini di esperimenti ideali motiva e sostiene ipotesi interpretative, che ricadono sulla stessa fenomenologia, per un confronto che permette di costruire con gradualità le caratteristiche degli enti formali, che entreranno a far parte del modello interpretativo. Il continuo passaggio dal fenomeno alla sua rappresentazione ideale e dagli esiti dell'esplorazione al significato dei risultati porta ad identificare gli enti formali e a studiarne l'adeguatezza in una collana di situazioni, per costruirne l'autonomia di impiego.

Prerequisiti

La polarizzazione è considerata come una proprietà da analizzare per le intrinseche peculiarità: non è richiesta un'interpretazione riferita alla descrizione della luce come onda elettromagnetica.

Il fotone come particella capace di descrivere i comportamenti della luce e di render conto della sua natura viene invece assunta come conoscenza consolidata da utilizzare per interpretare le situazioni proposte.

La rappresentazione vettoriale delle grandezze fisiche e le più elementari leggi di composizione dei vettori in uno spazio bidimensionale sono gli strumenti concettuali di riferimento per l'analisi proposta. È pertanto opportuno che vi sia un po' di familiarità prerequisita nella loro gestione.

PARTE II

IL FILO E I SUOI CONTENUTI*

La presentazione dei contenuti qui riportata è sintetica, volutamente scarna, per offrire all'insegnante strumenti operativi di un percorso concettuale. L'illustrazione dei semplici esperimenti ideali traccia il filo di un'analisi rigorosa in cui le situazioni scelte sono quelle necessarie per il riconoscimento dei concetti. Una rappresentazione iconografica delle situazioni, con scelte grafiche studiate per dare significato ad alcune idee, sostiene l'analisi concettuale degli esperimenti secondo una sequenza che rappresenta la nostra proposta. È lasciata all'insegnante la modalità di integrazione di questo percorso con attività di raccordo con altri ambiti conoscitivi, così come quella di approfondimento e consolidamento dei concetti.

In questo fascicolo presentiamo una proposta minimale di esperimenti sulla polarizzazione che consentono di contestualizzare il percorso proposto.

Si rimanda al sito internet www.fisica.uniud.it/URDF/ per ulteriori spunti, strumenti didattici, risorse e alla bibliografica per approfondimenti.

Il percorso

Una sequenza di concetti per esplorare le caratteristiche e il significato del formalismo della meccanica quantistica, con prerequisiti minimi.

- Si costruisce un'idea qualitativa del principio di sovrapposizione:
 - Si discutono alcune semplici esperienze di interazione di polaroid e cristalli birifrangenti con fotoni polarizzati linearmente.
- Si capiscono alcuni concetti fondamentali:

I - Lo stato di un sistema fisico è definito dalle proprietà fisiche che possono essere attribuite con certezza al sistema stesso.

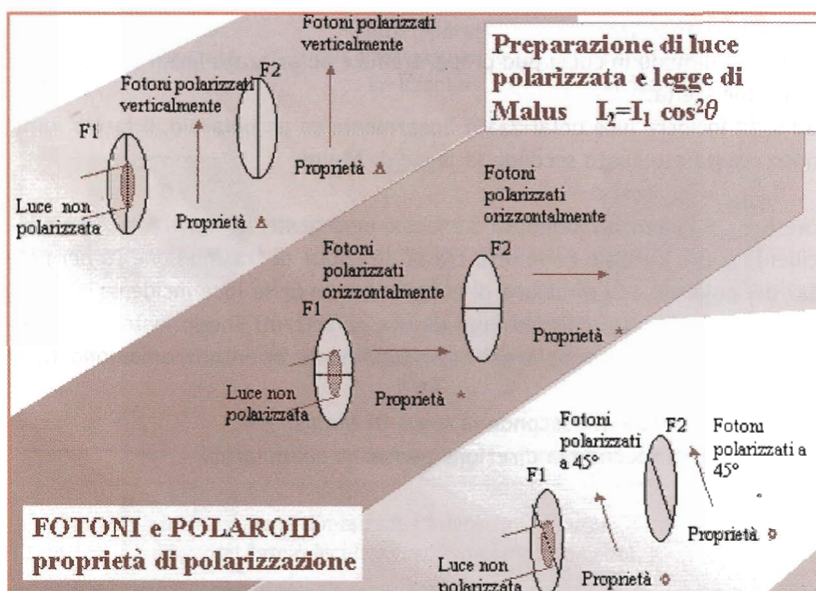


fig. 1

I fotoni vengono preparati in un opportuno stato di polarizzazione. Ad essi può essere associata operativamente una definita proprietà.

*NOTA: I contenuti del ragionamento proposto in questa Parte II, sono il risultato del lavoro svolto con G.Ghirardi e R. Grassi.

II - Due stati sono "fisicamente ortogonali" quando le proprietà fisiche che li definiscono sono mutuamente esclusive.

III - I possibili stati in cui possiamo trovare un sistema fisico, dopo che è stato sottoposto ad un processo di misura, sono mutuamente ortogonali.

- Si rende plausibile che lo stato di un fotone polarizzato linearmente possa essere descritto da un vettore appartenente ad uno spazio vettoriale.
- Si assume che la fisica classica descriva correttamente il comportamento medio di un grande numero di fotoni.
- Si stabilisce il legame tra il prodotto scalare di due vettori e la probabilità di transizione tra i corrispondenti stati fisici.
- Si estendono questi risultati ad un sistema fisico generico.

A - Si introduce la rappresentazione degli stati fisici in termini di ampiezze: Il vettore di stato di polarizzazione lineare: può essere scritto come combinazione lineare di due versori mutuamente ortogonali correlati a proprietà mutuamente esclusive.

I coefficienti di tale combinazione sono detti ampiezze e forniscono una descrizione alternativa per lo stato di un fotone.

B - Si correlano il concetto di ampiezza e la definizione di stati "ortogonali": la sovrapposizione tra due stati ortogonali è rappresentata da una coppia di ampiezze.

È quindi legittimo ammettere che la sovrapposizione tra n stati ortogonali venga rappresentata da una n -pla di ampiezze.

- Il ruolo degli operatori lineari emerge dal problema di calcolare il valore atteso di una osservabile fisica.

Preparazione di luce polarizzata e legge di Malus

Se si fa incidere luce non polarizzata su un polaroid: la luce emergente dal polaroid risulta sempre polarizzata lungo la direzione permessa del polaroid. (Fig 2)

È questo il modo in cui si può preparare luce polarizzata linearmente in una direzione scelta.

Se si fa incidere luce polarizzata linearmente su un polaroid, il fascio luminoso risulta attenuato secondo la legge di Malus:

$$I_{\text{trasm}} = I_{\text{inc}} \cos^2 \vartheta$$

ove I_{trasm} è l'intensità luminosa del fascio emergente, I_{inc} quella del fascio incidente e ϑ è l'angolo compreso tra la direzione di trasmissione (o permessa) del polaroid e la direzione di polarizzazione della luce incidente.

Facendo incidere su polaroid fasci di luce polarizzati linearmente (ad esempio preparati da altri polaroid opportunamente orientati) emergono fasci con:

- intensità attenuata secondo la legge di Malus.
- polarizzati secondo la direzione permessa del polaroid.

Validità della legge di Malus per il singolo fotone

L'analisi effettuata su fasci di luce pone il problema della rappresentazione microscopica del processo ed in particolare porta con sé la domanda se il comportamento osservato è un fenomeno collettivo o del singolo fotone.

È pertanto opportuno ripetere l'esplorazione fenomenologica eventualmente effettuata con intensità luminosa decrescente per registrare lo stesso comportamento.

Ammettendo che l'intensità luminosa sia descritta dal numero di fotoni che compongono il fascio di luce, la validità della legge di Malus al diminuire dell'intensità porta ad escludere che i risultati osservati dipendano da fenomeni collettivi di interazione tra fotoni.

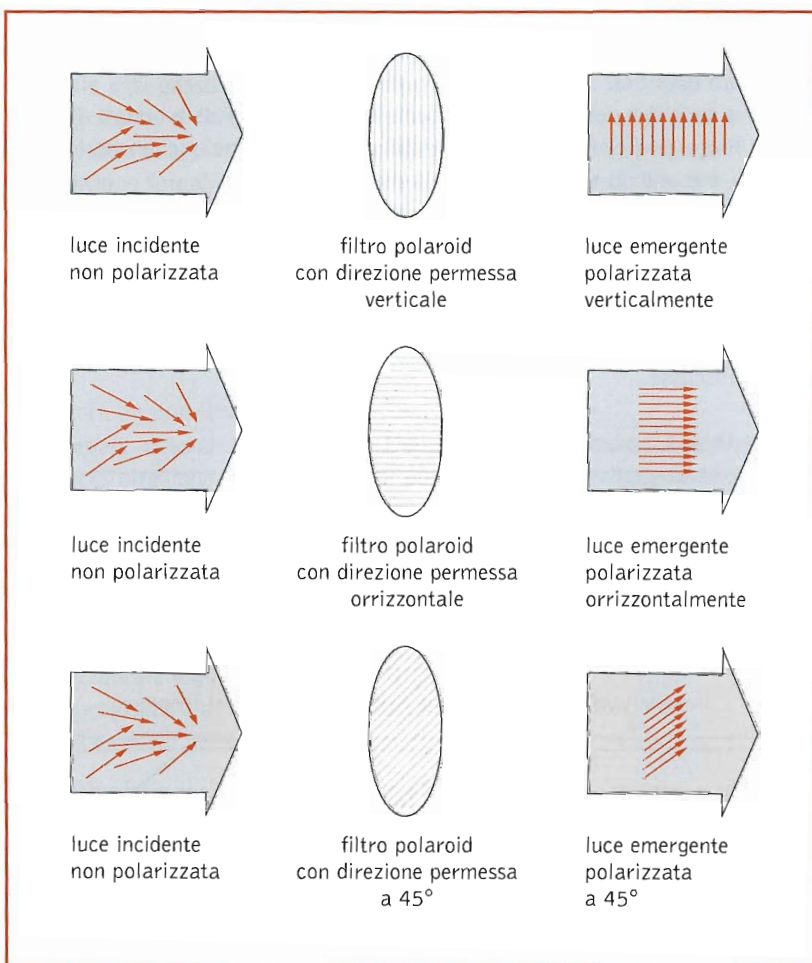


fig. 2

Un fascio di luce non polarizzata incide su un polaroid. La luce emergente è polarizzata linearmente secondo la direzione permessa del polaroid.

Se si diminuisce l'intensità luminosa del fascio incidente: stesso comportamento.

I risultati della legge di Malus NON dipendono da fenomeni collettivi di interazione tra fotoni.

Stato quantico, vettore che lo descrive e principio di sovrapposizione

In un quadro classico di descrizione della luce come onda elettromagnetica, la direzione di polarizzazione coincide con quella del campo elettrico della radiazione incidente.

Il quadro mentale per l'analisi della fenomenologia di seguito proposta fa riferimento alla rappresentazione di stato in meccanica quantistica.

In fisica quantistica, lo stato di ogni sistema è descritto da un vettore appartenente ad uno opportuno spazio vettoriale (spazio di Hilbert). Tra i casi più semplici di spazi di Hilbert, che si possono considerare ci sono quelli che hanno dimensione 2, come quello associato agli stati di polarizzazione dei fotoni e quello di spin $1/2$ di una particella.

Gli stati di polarizzazione della luce sono infatti descritti quantisticamente da spazi vettoriali di dimensione 2, come lo spin, e ciò semplifica la comprensione di come sia la stessa natura vettoriale, che descrive la proprietà degli stati quantici.

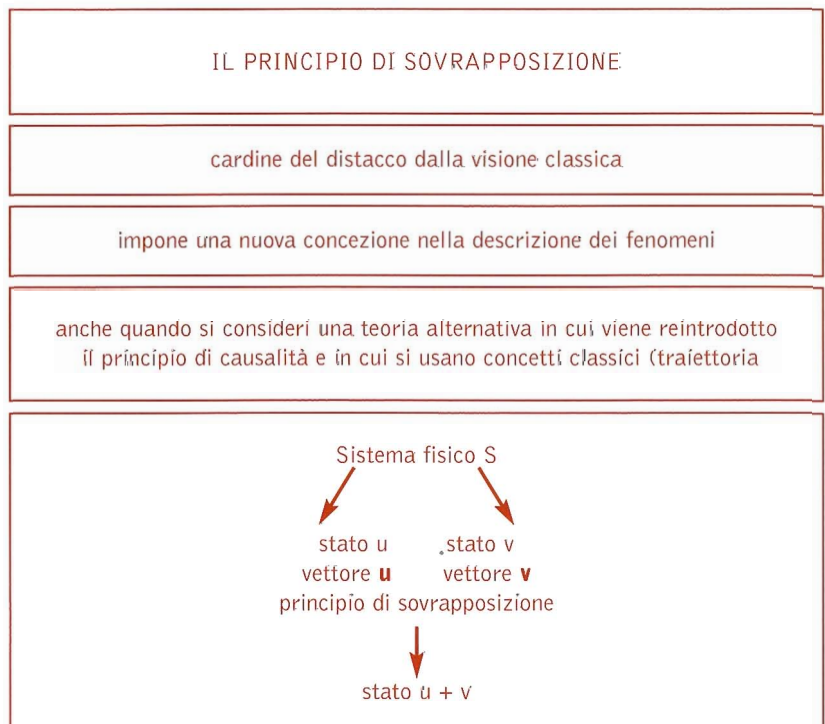
Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori corrispondenti a due diversi possibili stati di un sistema fisico S allora, secondo il principio di sovrapposizione, anche lo stato $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ è uno stato possibile per il sistema S .

Ovviamente tutti gli stati del tipo $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ con α coefficiente complesso sono possibili stati del sistema. Qui e in seguito abbiamo supposto che α sia reale, per evitare l'utilizzo dei numeri complessi non essenziale nella impostazione scelta.

Questo fatto, tuttavia, non limita in alcun modo la generalità delle conseguenze discusse.

Proprietà di polarizzazione e stati quantici della luce

Schema per la costruzione del principio di sovrapposizione.



Nel piano perpendicolare alla direzione del fascio di luce, definiamo come orizzontale e verticale due arbitrarie direzioni fra loro ortogonali.

Sia H lo stato dei fotoni associati alla luce polarizzata orizzontalmente e V lo stato dei fotoni associati alla luce polarizzata verticalmente. H e V sono stati ortogonali. (Fig. 3a)

Secondo lo schema quantistico, ai fotoni polarizzati a 45° viene associato il vettore ($H + V$) corrispondente alla sovrapposizione lineare dei due vettori H e V (Fig. 3b).

Consideriamo situazioni ideali di interazione di fasci di luce a bassa intensità con polaroid. La bassa intensità del fascio luminoso ci permette di poter ritenere che ciascun fotone interagisca sempre e solo con il polaroid.

Se si inviano fotoni nello stato V su un polaroid con direzione permessa verticale essi passano sempre indisturbati. Poiché l'esito di questa interazione (misura) è certo: cioè è prevedibile con certezza, possiamo attribuire al fotone una proprietà corrispondente che indicheremo con Δ (Fig. 4). Se si inviano fotoni nello stato H su un polaroid con direzione permessa orizzontale essi passano sempre indisturbati. Anche in questo caso siamo quindi condotti ad attribuire loro una proprietà corrispondente che indicheremo con $*$ (Fig. 5). Possiamo anche constatare che se il polaroid ha direzione permessa orizzontale, i fotoni V vengono tutti assorbiti (Fig. 4), mentre se il polaroid ha direzione permessa verticale, i fotoni H vengono tutti assorbiti (Fig. 5).

Proprietà mutuamente esclusive

In generale, possiamo attribuire ad ogni fotone polarizzato linearmente in una certa direzione una proprietà di polarizzazione corrispondente a quella direzione.

Ad esempio:

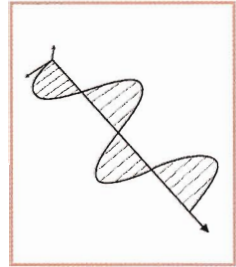
- la proprietà Δ ai fotoni polarizzati linearmente in direzione verticale e quindi nello stato V ,
- la proprietà $*$ ai fotoni polarizzati linearmente in direzione orizzontale e quindi nello stato H ,
- la proprietà $\Diamond$ ai fotoni polarizzati linearmente in direzione 45° e quindi nello stato $H + V$.

Dall'interazione dei fotoni polarizzati linearmente con i polaroid, vediamo che i fotoni:

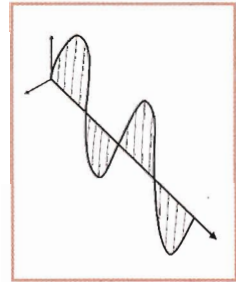
- nello stato V :
 - passano sempre con certezza un polaroid con direzione permessa verticale
 - sono tutti assorbiti da polaroid con direzione permessa orizzontale
- nello stato H :
 - passano sempre con certezza un polaroid con direzione permessa orizzontale
 - sono tutti assorbiti da polaroid con direzione permessa verticale

Ne segue che le proprietà Δ e $*$ sono mutuamente esclusive.

Fig 3a
Luce polarizzata linearmente: la direzione di polarizzazione corrisponde alla direzione del campo elettrico



Polarizzazione orizzontale stato H



Polarizzazione verticale stato V

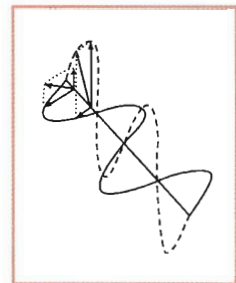


Fig 3b
Polarizzazione a 45° stato $H + V$

Figura 4

Fotoni polarizzati verticalmente (con proprietà Δ ; nello stato V) vengono:

- sempre trasmessi da un polaroid con direzione permessa verticale;
- assorbiti da un polaroid con direzione permessa orizzontale;
- trasmessi nella metà dei casi da un polaroid con direzione permessa a 45°

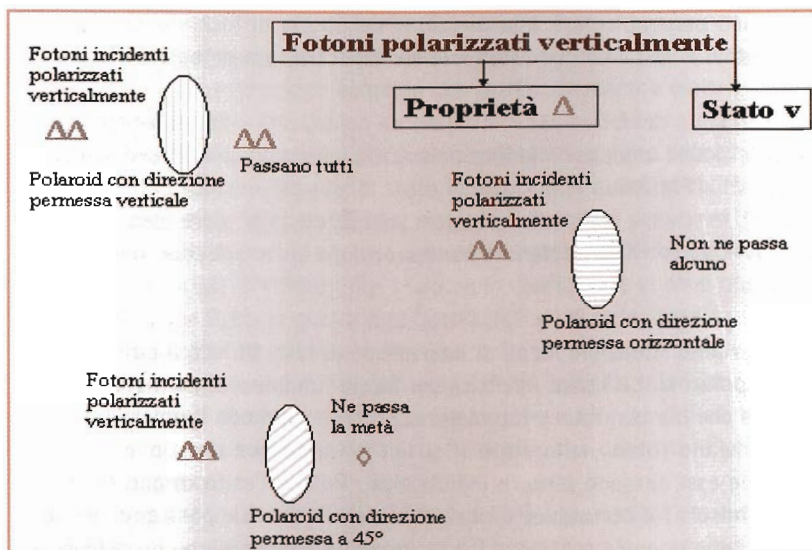


Figura 5

Fotoni polarizzati orizzontalmente (con proprietà $*$; nello stato H) vengono:

- sempre trasmessi da un polaroid con direzione permessa orizzontale;
- assorbiti da un polaroid con direzione permessa verticale;
- trasmessi nella metà dei casi da un polaroid con direzione permessa a 45° .

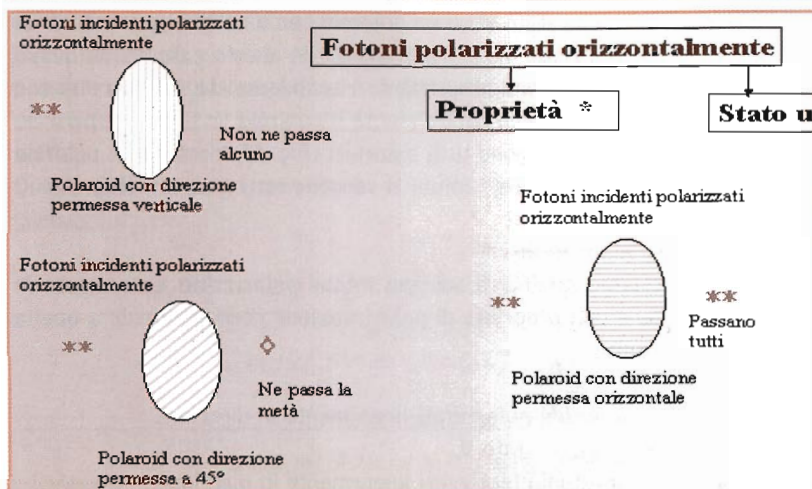
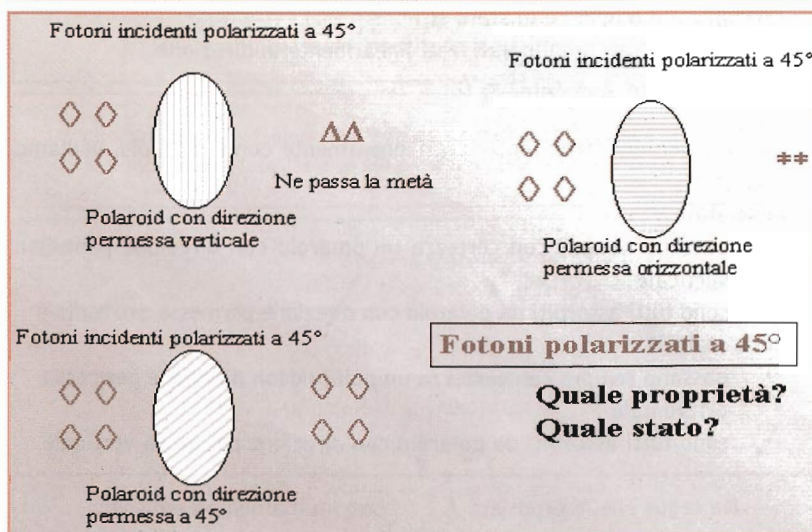


Figura 6

Fotoni polarizzati a 45° (con proprietà $\diamond$) vengono:

- sempre trasmessi da un polaroid con direzione permessa a 45° ;
- trasmessi nella metà dei casi da un polaroid con direzione permessa o verticale o orizzontale.



Proprietà incompatibili e stato di sovrapposizione H+V

Ci si propone di capire il significato dello stato quantico ($H + V$):

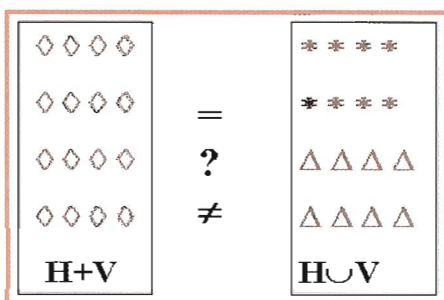
Si inviano fotoni polarizzati a 45° , e quindi nello stato quantico ($H+V$), su un polaroid con direzione permessa, per brevità diciamo, orientati orizzontalmente o verticalmente.

Misurando l'intensità della radiazione che ha attraversato il polaroid si trova che essa è la metà di quella incidente e della stessa frequenza.

Metà dei fotoni incidenti attraversa il polaroid e ne esce con una diversa polarizzazione, orizzontale (stato H, con proprietà $*$) o verticale (stato V, con proprietà Δ) a seconda della direzione permessa del polaroid. (Fig. 6)

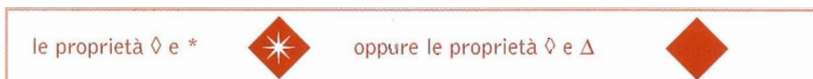
Facciamo un po' di ipotesi interpretative.

L'insieme di fotoni polarizzati a 45° e quindi nello stato ($H + V$) (cui è associata la proprietà $\Diamond$):



1) può essere pensato come un insieme di fotoni costituito da una miscela statistica di fotoni con proprietà $*$ e Δ .

2) può essere pensato come un insieme di fotoni che hanno simultaneamente due proprietà ed in particolare, con ugual peso:



Sicché l'esito dell'interazione con i polaroid è dovuto alle proprietà $*$ e Δ .

È come pensare che i polaroid:

- 1) selezionino i fotoni che hanno la proprietà corrispondente alla direzione permessa dal polaroid, come in Fig. 7A
- 2) spoglino i fotoni dalle proprietà che non corrispondono alla direzione permessa dal polaroid, come mostrato in Fig. 7B.

Riconsideriamo l'interazione dei fotoni polarizzati linearmente in vari modi, e quindi ad esempio con proprietà $\Diamond$, Δ , $*$, con polaroid aventi direzione permessa a 45° .

I risultati mostrano quanto segue:

- la radiazione che attraversa il polaroid a 45° esce sempre polarizzata a 45° ;
- l'intensità trasmessa risulta dimezzata rispetto a quella incidente se quella incidente era costituita da fotoni polarizzati orizzontalmente ($*$, stato H) o verticalmente (Δ , stato V).
- l'intensità trasmessa risulta uguale a quella incidente (o attenuata solo di un fattore indipendente dallo stato di polarizzazione) se si inviano fotoni polarizzati a 45° , con proprietà $\Diamond$ e cioè nello stato ($H+V$).

Fig. 7A
I polaroid selezionano i fotoni con proprietà corrispondente alla direzione permessa dal polaroid

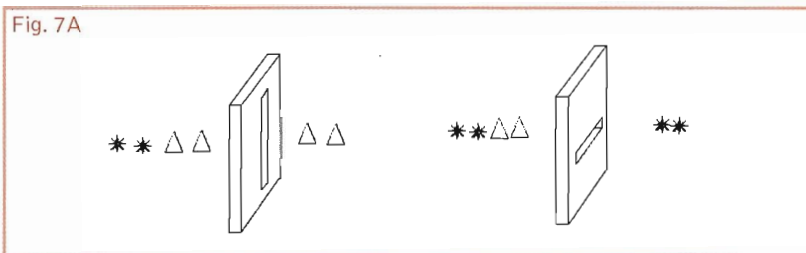


Fig. 7B
I polaroid spogliano i fotoni di tutte le proprietà che non corrispondono a quella permessa dal polaroid.

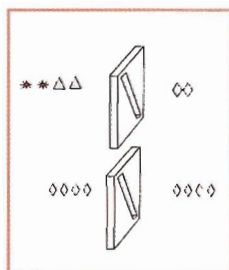
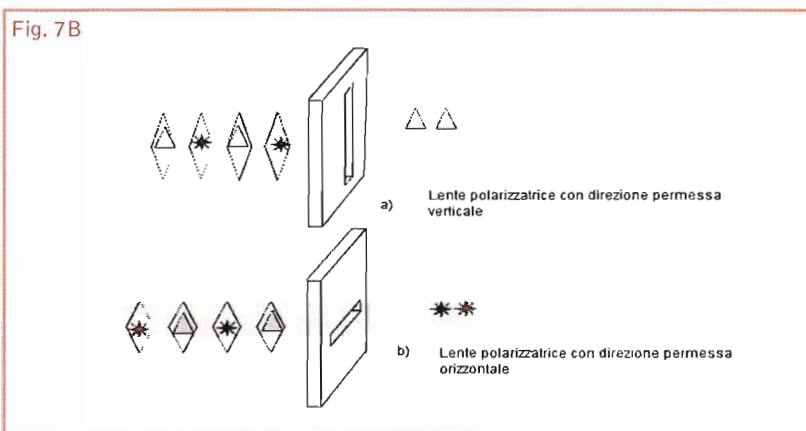


Fig. 8
Fotoni polarizzati a 45° che attraversano polaroid a 45°. I casi di miscela statistica di proprietà e di proprietà specifica danno esiti diversi.

La Fig. 8 mostra che nel caso di miscela statistica di fotoni con proprietà * e Δ si ottengono risultati diversi da quelli che si hanno nel caso di fotoni tutti con la stessa proprietà $\Diamond$.

Ciò si può leggere anche in questo modo:

- mentre i fotoni nello stato $H + V$ passano tutti indisturbati
- soltanto la metà dei fotoni passa attraverso il polaroid, nel caso dell'insieme costituito dal 50% di fotoni nello stato H dal 50% di fotoni nello stato V .

Questo fa cadere l'ipotesi considerata della miscela statistica di stati, come unione di fotoni in stati H e V , ossia $H + V \neq H \cup V$

Un fotone con proprietà $\Diamond$ non può aver anche proprietà del tipo * o Δ .

Per questo le proprietà $\Diamond$ e * oppure $\Diamond$ e Δ vengono chiamate incompatibili.

Ciò può essere visto come una specie di democrazia della meccanica quantistica rispetto ai fotoni: li vuole considerare tutti uguali.

Principio di indeterminazione

Un fotone con proprietà $\Diamond$ non può aver anche proprietà del tipo * o Δ .

Abbiamo già visto che le proprietà * o Δ sono mutuamente esclusive.

Ora abbiamo visto che ciascuna di esse è incompatibile con la proprietà $\Diamond$, perché corrispondenti ad osservabili incompatibili: la polarizzazione verticale (orizzontale) e la polarizzazione a 45°.

Il fatto che non si possano attribuire simultaneamente ad un sistema definite proprietà illustra in modo semplice il principio d'indeterminazione in fisica quantistica, espressione dell'impossibilità di osservare simultaneamente due proprietà incompatibili.

Indeterminismo quantico

L'incompatibilità di proprietà sostiene la democrazia sui fotoni della meccanica quantistica, infatti comporta che essi si debbano vedere come tutti uguali tra loro. Ciò è una conseguenza del fatto che quando essi si trovano in uno stato possa essere loro attribuita una sola proprietà.

Tuttavia accade che fotoni del tutto identici si comportino in modo diverso. La situazione di Fig. 6 mostra che fotoni appartenenti ad un fascio polarizzato a 45° e quindi nello stato $H+V$, per cui a ciascuno può essere attribuita la proprietà $\hat{\sigma}$ si comportano in modo diverso se vengono fatti interagire con un polaroid con direzione permessa orizzontale (oppure verticale): il 50% passa attraverso il polaroid mentre il 50% viene assorbito. Perciò sistemi del tutto identici fra loro possono evolvere in maniera diversa. Questo esprime il concetto dell'indeterminismo quantistico, che contiene un'importante nuova idea di cui la meccanica quantistica è portatrice: l'impossibilità di attribuire a priori, separatamente da una misura, precise proprietà a sistemi fisici. L'attribuzione di precise proprietà ai sistemi comporta una loro conoscenza deterministica incompatibile con il carattere evolutivo di ogni sistema quando con esso si effettuano interazioni per eseguire delle misure, le quali peraltro producono per l'appunto anche la sua evoluzione.

Impossibilità di attribuire una traiettoria al fotone

Si può fare uno studio più approfondito del principio di sovrapposizione lineare e delle sue conseguenze, anche per quanto riguarda il concetto di traiettoria, considerando una serie di situazioni in cui l'analisi dello stato di polarizzazione del fotone viene effettuata con cristalli birifrangenti (calcite). Si può tagliare e disporre un tale cristallo rispetto all'asse ottico in modo che la luce incidente polarizzata orizzontalmente segua il raggio ordinario mentre quella polarizzata verticalmente segua il raggio straordinario e venga quindi deflessa. (Fig. 8a)

Anche in questo caso è importante lavorare a intensità molto basse in modo che nel dispositivo si trovi di volta in volta un singolo fotone.

Se si fanno incidere sul cristallo fotoni polarizzati a 45° , cioè nello stato $H + V$, il sistema evolve, per la linearità delle leggi quantistiche, nella sovrapposizione dei due stati corrispondenti alle due direzioni di polarizzazione associate ai due diversi percorsi di rifrazione, come mostrato in Fig. 8b.

Il cammino del fotone

Ponendo uno schermo su uno dei due cammini ed un contatore di fotoni sull'altro, si vede che quest'ultimo scatta il 50% delle volte (Fig. 9). Questo significa che il fotone non si "divide" nel dispositivo, in particolare non segue entrambi i cammini. Ponendo uno schermo ed un contatore di fotoni su entrambi i cammini, si può constatare che non viene rivelato alcun fotone. Perciò fotoni non possono giungere ai contatori seguendo cammini diversi da quelli considerati (Fig. 9).

Figura 8.

a) Nel cristallo si propagano due fasci che hanno polarizzazione ortogonale: il fascio straordinario è polarizzato verticalmente, quello ordinario orizzontalmente.
b) A ciascun cammino può essere associata una definita polarizzazione.

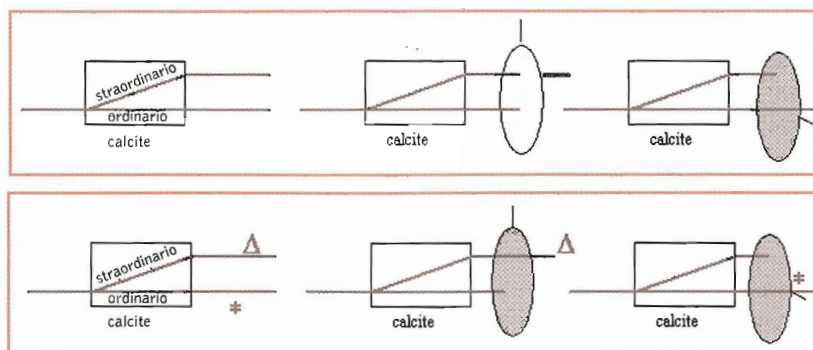
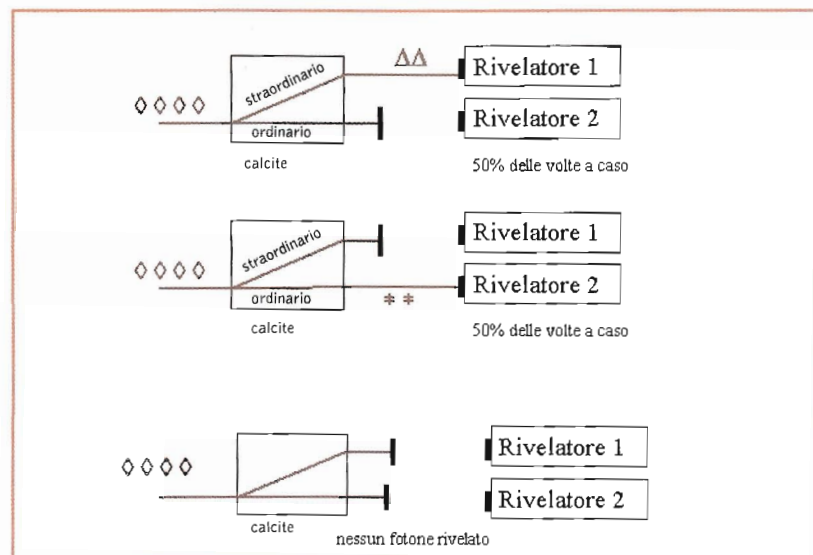


Figura 9.

I fotoni possono impiegare solo i cammini del fascio ordinario o straordinario, infatti:
a) se si intercetta il fascio ordinario il rivelatore 1 scatta il 50% delle volte;
b) se si intercetta il fascio straordinario il rivelatore 2 scatta il 50% delle volte;
c) se entrambi i fasci vengono intercettati, non viene rilevato alcun fotone.



I cristalli birifrangenti sono mezzi trasparenti non isotropi, che danno luogo a due distinti raggi rifratti in corrispondenza di un'unica direzione di incidenza, purchè essa non sia quella dell'asse ottico o asse di simmetria principale del cristallo. L'asse ottico si individua proprio per estinzione dello sdoppiamento della luce rifratta.

I due raggi rifratti hanno diversa velocità di propagazione nel cristallo ed emergono con polarizzazione rettilinea in due piani tra loro ortogonali. Uno di essi segue la legge di rifrazione normale di Cartesio, qualunque sia il piano e l'angolo di incidenza: per questo motivo viene denominato "raggio ordinario". L'altro è caratterizzato da un indice di rifrazione variabile con l'angolo di incidenza e piani di rifrazione non coincidenti con quello di incidenza. Sono birifrangenti cristalli con struttura esagonale, come il quarzo e con struttura rombica, come la calcite o spato d'Islanda.

La calcite, come gli altri cristalli birifrangenti, può trasmettere radiazione polarizzata linearmente solo parallelamente (raggio straordinario) e perpendicolarmente (raggio ordinario) al piano della sezione principale. La sezione principale è il piano che contiene l'asse ottico e la normale ad una faccia del cristallo. Si veda anche la scheda dell'esperimento: *Interazione di luce polarizzata con un cristallo birifrangente.*

Possiamo affermare che un singolo fotone segue un particolare cammino?

Data la correlazione tra il cammino e lo stato di polarizzazione dei fotoni, questo equivale a chiedersi se l'insieme di fotoni che emergono dal primo cristallo può essere considerato composto dal 50% di fotoni nello stato V che seguono il cammino non deflesso e dal 50% di fotoni nello stato H che seguono il cammino deflesso.

Consideriamo un esperimento con un cristallo di calcite "inversa". Questo cristallo è disposto sul cammino dei fotoni in modo da compensare le deflessioni prodotte dal primo cristallo (Fig. 10).

Facendo incidere sul sistema costituito dai due cristalli, fotoni con polarizzazione verticale (stato V) e orizzontale rispettivamente (stato H), questi emergono secondo un cammino non deflesso e con la polarizzazione originale.

Se si manda nel sistema un insieme di fotoni polarizzati a 45° , cioè nello stato $(H + V)$, essi emergono tutti con polarizzazione a 45° .

Ponendo un polaroid con direzione permessa a 45° dopo il secondo cristallo di calcite, tutti i fotoni lo attraversano (Fig. 11a).

Se i fotoni fossero una miscela statistica di fotoni nei due stati H e V con ugual peso oppure fossero identificabili in tali stati dopo il primo cristallo birifrangente, dovremmo rivelare la metà dei fotoni (Fig. 11b).

In conclusione, nello stato di sovrapposizione $(H + V)$, il fotone: non segue il cammino deflesso, non segue il cammino non deflesso, non li segue entrambi, non segue un cammino diverso.

È il concetto di traiettoria che perde di significato! Non si può attribuire al fotone una traiettoria definita!

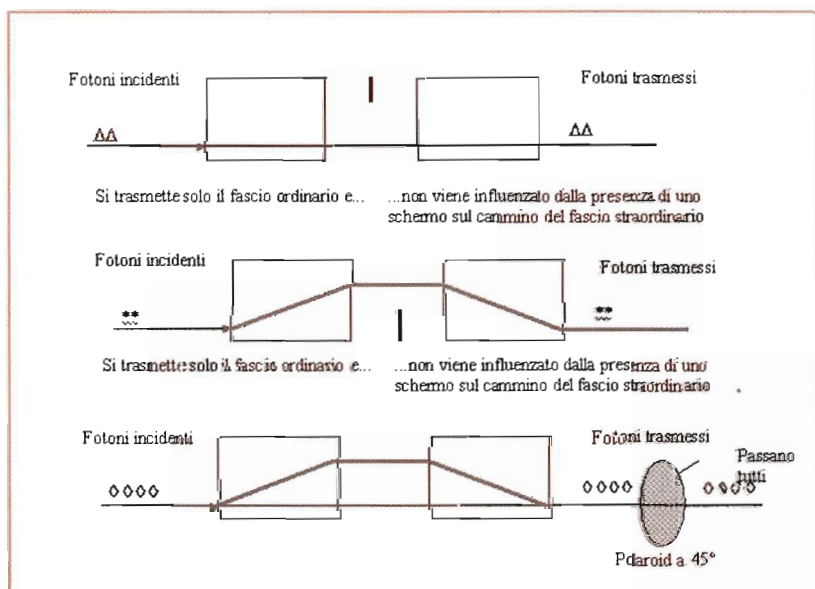
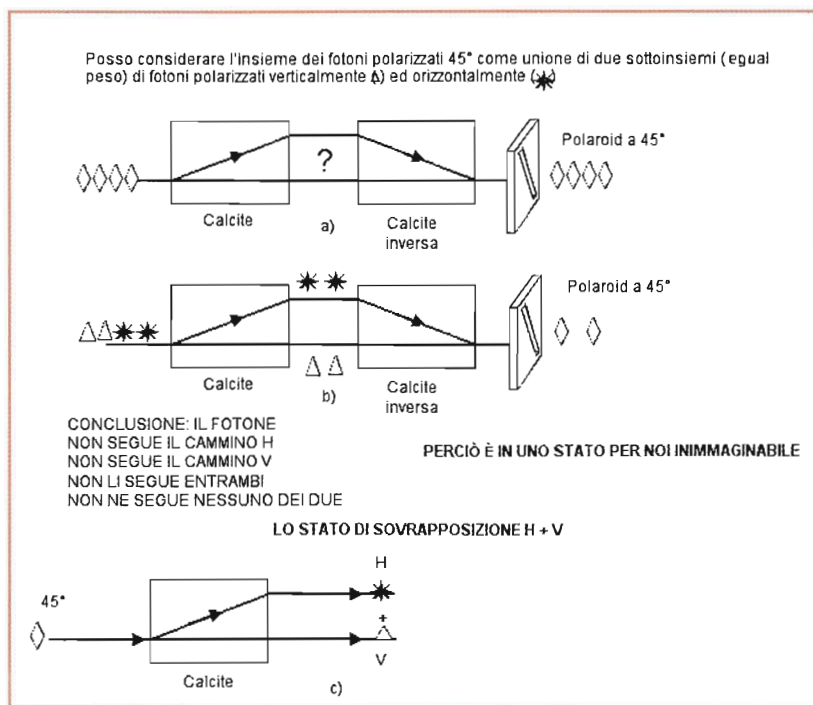


Figura 10.
Nel sistema dei due cristalli di calcite diretta e inversa allineati vengono sempre trasmessi tutti i fotoni mantenendone le proprietà.

Figura 11.

a) Tutti i fotoni incidenti con polarizzazione a 45° e proprietà $\Diamond$ vengono trasmessi dal polaroid.
b) Solo metà dei fotoni viene trasmessa se il fascio incidente è formato dalla miscela statistica di fotoni con proprietà Δ e $*$.



L'analogia con la diffrazione di elettroni

Alle stesse conclusioni si può arrivare analizzando esperimenti di diffrazione di particelle (onde materiali Fig. 12).

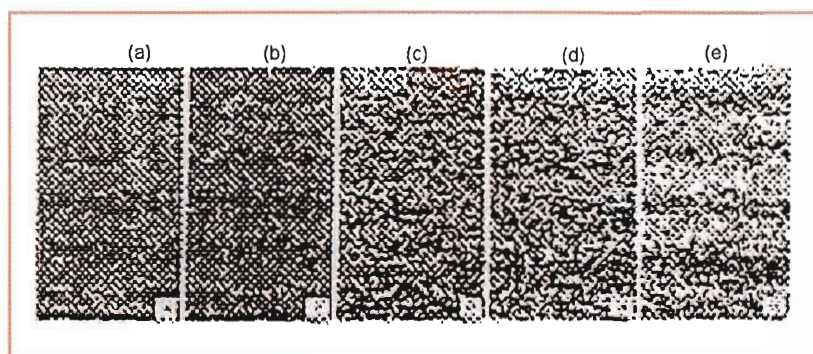
L'ipotesi di De Broglie, verificata sperimentalmente ad un alto livello di accuratezza, consiste nell'associare ad una particella con impulso p un'onda piana di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$, ove h è la costante di Planck.

L'analisi che si può compiere porta a considerare la possibilità di prevedere in quale delle due fenditure passa ciascuna particella ovvero la possibilità di individuare il punto in cui una particella arriva nello schermo per costruire la distribuzione caratteristica della figura di diffrazione.

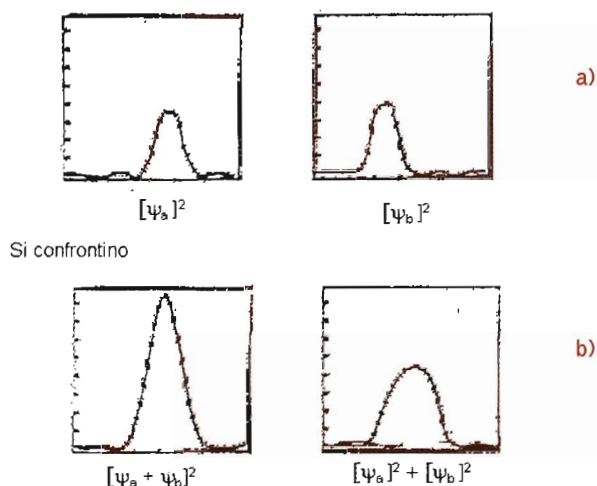
Come appare in Fig. 12 ogni particella arriva in un punto a caso dello schermo ed è il grande numero di particelle che produce la caratteristica distribuzione dovuta all'interferenza delle stesse.

Figura 12.

L'emergere di una figura di diffrazione di elettroni da un apparato a due fenditure.
Il caso (a) si riferisce alla rilevazione di 10 elettroni.
Passando da (b) ad (e) i numeri registrati sono 100, 3000, 20.000 e 70.000.



Il principio di sovrapposizione dal punto di vista del paradigma ondulatorio



Conclusione: non si può asserire che le particelle materiali siano passate attraverso una delle due fenditure.

Figura 13.

a) Distribuzioni di intensità rilevate sullo schermo quando è aperta o solo la fenditura a o solo la fenditura b.
b) La distribuzione di intensità rilevata sullo schermo quando entrambe le fenditure sono aperte è molto diversa da quella che si avrebbe come somma delle distribuzioni rilevate da ciascuna delle due fenditure.

Come appare in Fig.13, inoltre, la distribuzione delle particelle su uno schermo equidistante dalle fenditure nei casi in cui una delle due fenditure sia chiusa ed entrambe aperte risulta decisamente diversa.

Significativamente diverse sono anche le distribuzioni di probabilità prodotte dall'interazione delle particelle che passano per entrambe le fenditure ($[\psi_a + \psi_b]^2$) e dalla somma delle distribuzioni prodotte dalle singole fenditure aperte ($[\psi_a]^2 + [\psi_b]^2$).

Anche in questo caso non è possibile attribuire alle particelle una traiettoria definita passante per una delle due fenditure.

La misura e il mondo macroscopico

Al contrario di quanto viene spesso asserito, la fisica quantistica non si riduce alla fisica classica per sistemi macroscopici. In particolare, se H e V corrispondono a stati macroscopici diversi di un sistema, lo stato $H + V$ non corrisponde a proprietà macroscopiche definite del sistema. Ad esempio, se S è un sistema macroscopico, ad esempio un corpo rigido, ed u e v sono due stati corrispondenti al corpo localizzato in due diverse regioni spaziali A e B , secondo il principio di sovrapposizione lineare anche il vettore di stato $w = u + v$ rappresenta un possibile stato per il sistema S . L'esistenza di tali stati costituisce un problema molto serio per la teoria quantistica a livello macroscopico. Infatti, analogamente a quanto visto nel caso della polarizzazione dei fotoni, se il sistema S è nello stato w non possiamo attribuirgli né la proprietà di essere nella regione A dello spazio né quella di essere nella regione B : il corpo non ha cioè una posizione definita. Questa impossibilità di attribuire, in generale, una posizione ed una traiettoria definite ad un oggetto macroscopico è in evidente contrasto con le nostre percezioni e con la nostra visione del mondo macroscopico.

La descrizione dei fenomeni fisici a livello macroscopico, che la teoria quantistica dà, appare poter essere legata esclusivamente a processi di misura su

sistemi microscopici: ne costituisce esempio carismatico il famoso esperimento "ideale" del gatto di Schrödinger. Si tratta di un processo di misura su un sistema atomico in cui il rivelatore è un marchingegno mortale che viene innescato in corrispondenza di uno degli esiti della misura ed uccide il gatto, mentre in corrispondenza degli altri esiti ciò non avviene. Per opportuni stati iniziali del sistema atomico, lo stato finale del sistema composto è uno stato correlato corrispondente alla sovrapposizione $GV + GM$ (GV = gatto vivo, GM = gatto morto), che descrive un gatto che non è né vivo né morto.

Una possibile soluzione al problema della teoria della misura quantistica è fornita dalla teoria unificata di Ghirardi, Rimini e Weber [4] dei micro e dei macrosistemi, che porta ad una rapida soppressione degli stati, sovrapposizione di stati macroscopicamente diversi, e si riduce praticamente alla meccanica quantistica per i microsistemi.

La non località

Come conseguenza del principio di sovrapposizione lineare, due sistemi distanti che hanno interagito in passato risultano generalmente correlati.

Un semplice esempio è dato da due fotoni nello stato di polarizzazione $1_H 2_H - 1_V 2_V$.

Secondo la teoria quantistica, i fotoni descritti da tale stato non hanno polarizzazione definita in alcuna direzione; tuttavia la probabilità di trovare lo stesso esito in una misura della polarizzazione su due fotoni in qualsiasi direzione comune è uno. Questa situazione è in netto conflitto con la richiesta di località; infatti, se i due fotoni sono distanti e gli esiti delle misure genuinamente stocastici, come può un fotone conoscere l'esito dato dall'altro alla misura in assenza di effetti non locali?

Questo tipo di analisi ci porta a concludere, con Einstein, Podolsky e Rosen [5] che gli esiti di misure, su sistemi distanti, di osservabili correlate al 100% non possono essere genuinamente stocastici e che pertanto la teoria quantistica deve essere considerata incompleta.

Nel 1964 Bell [6] ha provato che non è possibile trovare un completamento deterministico e locale della teoria quantistica, che risulta quindi fondamentalmente non locale.

Non è tuttavia possibile utilizzare le caratteristiche non locali della teoria per mandare segnali ad una velocità superiore alla velocità della luce [7].

E' questo fatto che permette una "pacifica coesistenza" della fisica quantistica con la teoria della relatività.

[4] G.C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, *Phys. Rev.*, **Δ 34**, 470 (1986).

[5] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935).

[6] J.S. Bell, *Physics*, **1**, 195 (1964).

[7] G.C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, *Lettere al Nuovo Cimento*, **27**, 293 (1980).

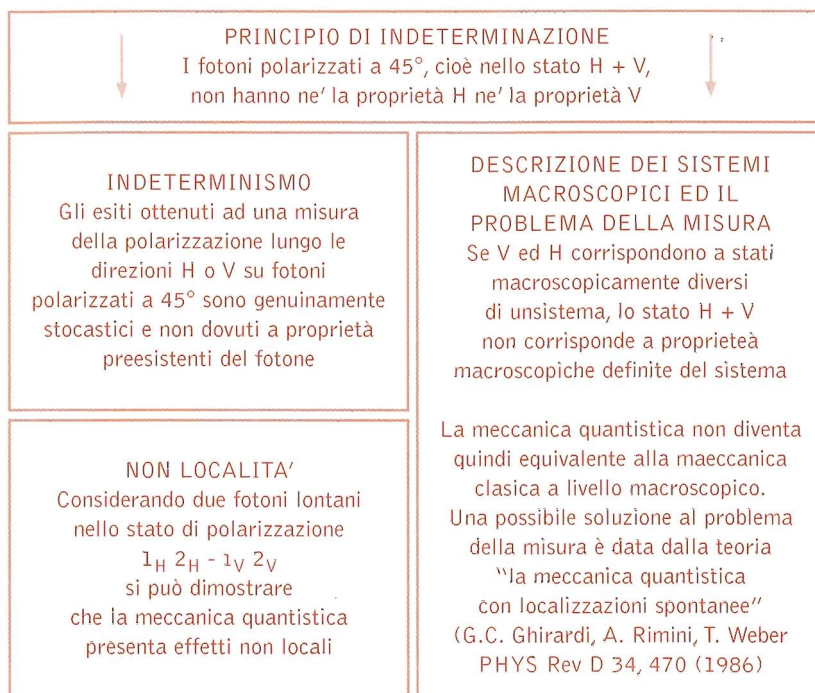


Figura 14.
Alcuni elementi peculiari della teoria quantistica, che portano a chiedersi se è completa.

Teorie alternative

Come abbiamo già accennato, il principio di sovrapposizione lineare impone l'abbandono di una visione classica dei fenomeni fisici anche quando si considerino teorie alternative che, pur riproducendo le previsioni statistiche della teoria quantistica, reintroducano concetti classici come il principio di causalità e le traiettorie. Per analizzare questo fatto possiamo considerare nuovamente gli esperimenti con fotoni polarizzati e con le lenti polaroid o con i cristalli di calcite. Naturalmente i primi sono i più semplici.

Sappiamo che se si invia un fascio di fotoni polarizzati verticalmente su un polaroid orientato verticalmente tutti i fotoni passano indisturbati (fig. 4). A questo comportamento caratteristico dei fotoni V è stata associata una proprietà Δ . In questo nuovo spirito, un insieme di fotoni polarizzati a 45°, cioè nello stato $H + V$, sarà costituito dal 50% di fotoni che pur avendo ovviamente la proprietà Δ portano anche l'attributo Δ e dal 50% di fotoni che portano quello $*$.

Verrebbe spontaneo pensare, seguendo un ragionamento classico, che se i fotoni con l'attributo Δ vengono fatti passare attraverso un polaroid con direzione permessa verticale essi emergono tutti indisturbati. In realtà questo non accade. Per capirlo consideriamo i due seguenti esperimenti:

1. Un fascio di fotoni polarizzati a 45° viene inviato su un polaroid orientato a 45° . Passano tutti i fotoni e quindi anche in particolare tutti i fotoni con l'attributo Δ .
2. Un fascio di fotoni polarizzati a 45° viene inviato su un polaroid orientato verticalmente seguito da un polaroid orientato a 45° . Soltanto il 25% dei fotoni attraversa l'ultimo polaroid. In particolare almeno la metà dei fotoni polarizzati a 45° ma con attributo Δ non passa.

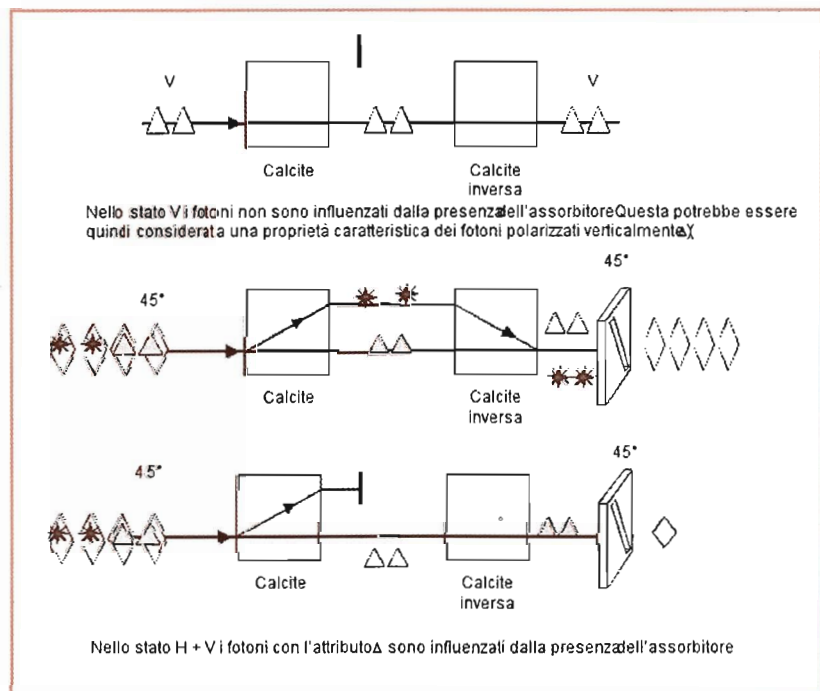
Questo fatto mostra chiaramente che la presenza del polaroid con direzione verticale ha influito sul comportamento di questi fotoni.

Essi, pur portando l'attributo Δ , sono in qualche modo consapevoli di essere nello stato sovrapposizione $H + V$ e non si comportano nel modo caratteristico dei fotoni V con la relativa proprietà Δ . Per questo, l'attributo Δ non può essere considerato come una proprietà classica di tali fotoni.

Il fatto che i fotoni nello stato $H + V$ ma con l'attributo Δ non si comportino nel modo caratteristico dei fotoni nello stato V può essere provato anche mediante esperimenti con i cristalli di calcite.

Consideriamo il dispositivo costituito dal primo cristallo di calcite e dalla "calcite inversa" e supponiamo di porre uno schermo sul cammino deflesso (Fig. 15). Se si inviano fotoni V nel dispositivo essi passano tutti indisturbati: la presenza dello schermo sul cammino deflesso non influenza i fotoni che seguono l'altro cammino.

Figura 15.
Non si riescono a prevedere gli esiti sperimentali attribuendo ai fotoni proprietà preesistenti opportune.



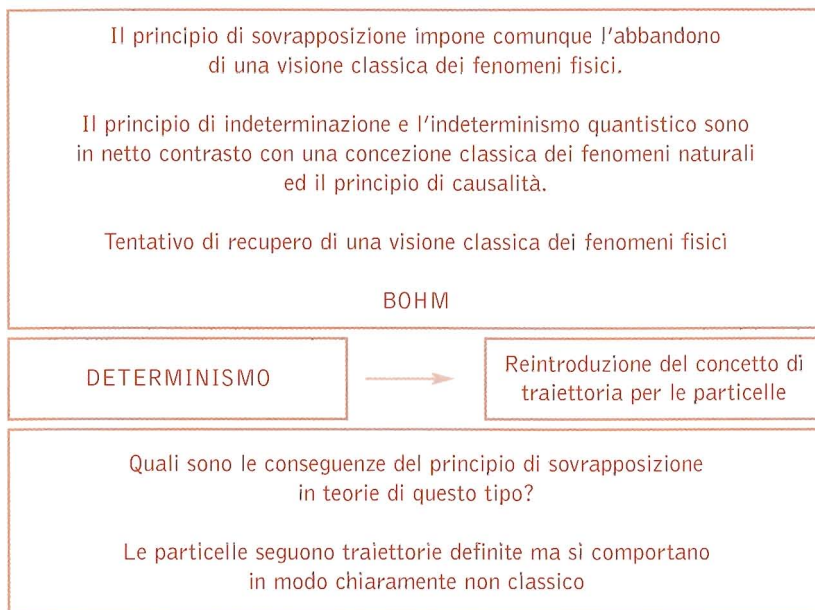


fig. 16
Alcuni elementi caratteristici della teoria di Bohm.

fig. 17
Traiettorie previste dalla teoria di Bohm per le particelle materiali negli esperimenti di diffrazione.

Come abbiamo visto sopra, un insieme di fotoni nello stato $H + V$ cioè polarizzati a 45° è costituito dal 50% di fotoni che hanno la proprietà $\hat{\phi}$ e l'attributo $*$ (e seguono il cammino deflesso) e dal 50% di fotoni che hanno la proprietà $\hat{\phi}$ e l'attributo Δ (e seguono il cammino non deflesso). Nella situazione sperimentale in cui si hanno i due cristalli di calcite seguiti da un polaroid orientato a 45° , tutti i fotoni inviati sul dispositivo passano attraverso il polaroid, in particolare tutti i fotoni che hanno la proprietà $\hat{\phi}$ e l'attributo Δ . Se ora poniamo uno schermo sul cammino deflesso, possiamo constatare che solo il 25% dei fotoni passa attraverso il polaroid, così che almeno la metà dei fotoni con l'attributo Δ non passa (Fig. 15). Questi fotoni sono stati quindi influenzati dalla presenza dello schermo sull'altro cammino. Le conclusioni che se possono trarre sono del tutto analoghe a quelle del caso precedente.

Nella sezione precedente abbiamo accennato al fatto che si sarebbe potuto studiare il principio di sovrapposizione lineare ed analizzare le sue conseguenze anche considerando esperimenti di diffrazione di onde materiali da due fenditure.

Per le particelle materiali esiste effettivamente la teoria di Bohm [8] che, pur riproducendo le previsioni statistiche della meccanica quantistica, è deterministica ed assegna ad ogni particella una traiettoria definita (Fig. 16).

E' facile mostrare tuttavia come anche in questa teoria le particelle si comportino in modo non classico in particolare, in un esperimento di diffrazione da due fenditure, le traiettorie delle particelle uscenti da una fenditura sono notevolmente influenzate dall'eventuale presenza di uno schermo dietro all'altra fenditura (fig. 17).



Conclusioni:
nel caso B le particelle che attraversano la fenditura A sono in qualche modo consapevoli di essere nella sovrapposizione $\Psi_a + \Psi_b$

[8] D. Bohm, Phys. Rev- 85, 166 (1952).

VERSO IL FORMALISMO*

Il percorso sin qui proposto ha consentito di studiare situazioni semplici sul piano operativo per la comprensione di concetti difficili.

La rappresentazione iconografica utilizzata è lo strumento che proponiamo per la costruzione dei concetti basilare della teoria quantistica, come quello di stato quantico, sovrapposizione di stati, incompatibilità.

Il passo successivo del percorso consiste nel riprendere i concetti introdotti, per rendere conto del modo con cui la meccanica quantistica ne fornisce una rappresentazione formalizzata. Il contesto di riferimento è ancora quello della interazione di fotoni con polaroid a cristalli birifrangenti, ma i risultati ottenuti vengono proposti in una forma facilmente generalizzabile.

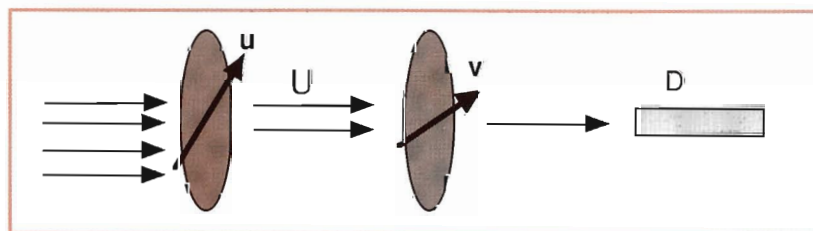
STATI FISICI, AMPIEZZE E VETTORI

Introduzione ad un'idea fondamentale:

gli stati quanto-meccanici sono descritti da vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale astratto.

Ogni fotone dell'insieme U (filtrato dal primo polaroid) ha la proprietà di attraversare con certezza un secondo polaroid con la stessa direzione permessa u.

Figura 18.
Apparato
sperimentale:
2 polaroid A e B, con
direzione permessa
lungo i versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, un
rilevatore di fotoni D.



Il secondo polaroid è orientato lungo una direzione arbitraria $\mathbf{v}$:

→ quali previsioni possiamo fare su U?

→ qual è la probabilità $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ per i fotoni U di attraversare B e far scattare D?

Un insieme formato da un gran numero di fotoni può essere descritto dalle leggi dell'ottica classica

=> legge di Malus

$$\frac{I_{tr}}{I_{in}} = \cos^2 \theta$$

θ : angolo tra la direzione di polarizzazione della luce incidente e la direzione permessa del polaroid.

Interpretiamo:

$$I_{tr} / I_{in} = \text{numero di fotoni trasmessi} / \text{numero di fotoni incidenti} = N_{tr} / N_i$$

*NOTA: I contenuti del ragionamento qui proposto, sono il risultato del lavoro svolto con R. Ragazzon.

Allora:

$$I_{tr} / I_{in} = N_{tr} / N_{in} = P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Poiché:

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos^2 \theta$$

D'altra parte:

$$\cos^2 \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Si ottiene:

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos^2 \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (2)$$

Qualunque sia la direzione permessa $\mathbf{v}$, il versore $\mathbf{u}$ determina il comportamento statistico dei fotoni.

Se accettiamo che le nostre previsioni siano inevitabilmente di carattere statistico, allora il versore $\mathbf{u}$ fornisce una descrizione completa dei fotoni appartenenti all'insieme U .

Lo stato di polarizzazione lineare di un fotone è quindi rappresentato da un vettore in uno spazio bidimensionale.

Il versore $\mathbf{v}$ può rappresentare lo stato di un fotone che ha attraversato il polaroid B .

Se il rivelatore D scatta, significa che la nostra misura ha indotto una transizione dallo stato $\mathbf{u}$ allo stato $\mathbf{v}$.

La relazione $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ indica una semplicissima procedura per determinare la probabilità di tale transizione.

Ogni vettore in uno spazio bidimensionale può essere scritto come combinazione lineare di due vettori mutuamente ortogonali $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$:

lo stato $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V}, \quad (3,a)$$

Le componenti ψ_1 and ψ_2 sono chiamate "ampiezze".

Devono obbedire alla condizione di normalizzazione:

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1. \quad (3,b)$$

Poiché $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$ sono versori (vettori unitari),

anch'essi rappresentano due possibili stati di un fotone linearmente polarizzato.

La relazione vettoriale:

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V}$$

rappresenta la formulazione quantitativa del principio di sovrapposizione per gli stati di polarizzazione: la combinazione lineare di due stati fisici è ancora uno stato fisico ammissibile.

D'altra parte essendo $\psi_1 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$, si ha che: ψ_1^2

è la probabilità di transizione dallo stato u allo stato H :

la probabilità di essere rivelato/misurato se la direzione permessa del secondo polaroid fosse $\mathbf{H}$.

ψ_1^2 è la probabilità di trovare un fotone nello stato H.

Analogamente, essendo $\psi_2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}$ si ha che: ψ_2^2 è la probabilità di transizione dallo stato u allo stato V: la probabilità di essere rivelato/misurato se la direzione permessa del secondo polaroid fosse $\mathbf{V}$.

ψ_2^2 fornisce la probabilità di trovare il fotone nello stato V

La relazione:

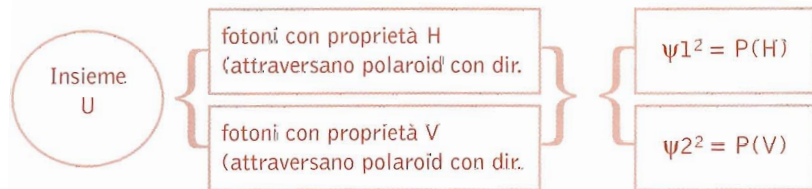
$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V},$$

contiene importanti novità concettuali.

Non riduzionismo: cerchiamo una via per capirle.

In fisica classica

L'insieme U può essere pensato come insieme (unione) di 2 sottoinsiemi disgiunti caratterizzati da proprietà fisiche complementari.



$P(H)$ or $P(V)$: probabilità che un fotone di U, scelto a caso abbia proprietà H o V.

La probabilità di scattare del rivelatore $P(D)$ è

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos^2 \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

con

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V}$$

perciò:

$$\begin{aligned} P(D) \equiv P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = [\psi_1 \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} + \psi_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}]^2 \\ &= P(H) (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})^2 + P(V) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})^2 + 2 \psi_1 \psi_2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4)$$

Lo stato $\mathbf{H}$: descrive il comportamento statistico dei fotoni con proprietà H
 $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})^2 = P(D | H) \Rightarrow$ probabilità di far scattare D, se il fotone ha la proprietà H.

$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})^2 = P(D | V) \Rightarrow$ probabilità di far scattare D, se il fotone ha la proprietà V.

Allora:

$$P(D) = P(H)P(D | H) + P(V)P(D | V) + 2 \psi_1 \psi_2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \quad (5)$$

Il terzo termine di questa espressione, che caratterizza l'interferenza quantistica, non può essere ottenuto con la regola della probabilità condizionata classica.

Esso è sempre presente se le ampiezze $\psi_1 \psi_2$ sono diverse da zero.

NON SI PUO':

- pensare U come costituito da 2 sottoinsiemi con proprietà H e V
- considerare il simbolo "+" come UNIONE.

Si tratta di una conseguenza del principio di sovrapposizione, priva di analogie o interpretazioni classiche.

Stati e ampiezze

Come scrivo il vettore di stato:

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V}$$

scrivo il vettore di stato $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \psi_1' \mathbf{H} + \psi_2' \mathbf{V} \quad (6)$$

che rappresenta ancora un possibile stato del sistema.

La probabilità $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ può allora essere scritta come:

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 = (\psi_1 \psi_1' + \psi_2 \psi_2')^2 \quad (7)$$

Un risultato importante: siamo passati

da una descrizione
vettoriale degli stati



ad una loro rappresentazione
in termini di ampiezze

- Ogni stato fisico viene individuato da una coppia di ampiezze
- La conoscenza delle ampiezze permette di determinare tutte le probabilità di transizione pertinenti al nostro sistema.

Ortogonalità tra stati

Gli stati quanto-meccanici vengono definiti dalle proprietà che possono essere attribuite con certezza ad un sistema fisico.

- Due stati sono ortogonali quando le proprietà fisiche che li caratterizzano sono mutuamente esclusive.

Gli stati di polarizzazione H e V sono ortogonali se un fotone che:

- ha la certezza di passare il polaroid con direzione permessa orizzontale
- ha anche quella di NON passare il polaroid con direzione permessa verticale.

Ogni processo di misura può essere riguardato come una "fabbrica" di stati ortogonali

L'osservabile quantità di moto: un caso per capire.

Vogliamo misurare la quantità di moto di una particella puntiforme.

Se una misura dà il valore p , dobbiamo essere certi che una seconda misura dia lo stesso valore.

Quindi lo stato caratterizzato dal valore p è ortogonale a tutti gli stati con $p' \neq p$.

Conseguenza:

- un sistema fisico complesso ammette più di due stati mutuamente ortogonali.
- La particella puntiforme considerata può trovarsi in un numero infinito di stati ortogonali distinti, uno per ogni possibile valore della quantità di moto.

Ciò si applica a qualunque grandezza fisica.

Il formalismo generale della meccanica quantistica può essere derivato combinando insieme il concetto di ampiezza e la definizione di ortogonalità tra stati fisici.

- la coppia di ampiezze (ψ_1, ψ_2) rappresenta la sovrapposizione di due stati fisici ortogonali per la polarizzazione del fotone,
- le ampiezze $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots)$ rappresentano la sovrapposizione di più stati ortogonali,

ψ_i^2 : probabilità con cui una certa misura induce una transizione all' i -mo stato della sovrapposizione rappresentata dalle n ampiezze $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots)$.

In generale, la probabilità di transizione da una sovrapposizione $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots)$ ad una seconda sovrapposizione $(\psi_1', \psi_2', \dots, \psi_i', \dots)$, si ottiene come:

$$P = \sum_{i=1, \dots, N} (\psi_i \psi_i')^2$$

Lo studio di un reticolo di diffrazione potrebbe essere utilizzato per mostrare come sia effettivamente necessario considerare la sovrapposizione di un numero arbitrario di stati ortogonali.

OPERATORI LINEARI

In meccanica quantistica ogni osservabile fisica è associata ad un operatore lineare.



Un gioco per capirli

Consideriamo un oggetto matematico, un operatore $\hat{O}$ del tipo $\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot$ e appliciamolo a un vettore $\mathbf{c}$.

Il risultato dell'operazione è un nuovo vettore proporzionale ad $\mathbf{a}$

$$\mathbf{c} \xrightarrow{\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$$

numero

Posso considerarne altri:

$$\begin{aligned} \hat{O}' &= \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot \\ \hat{O}'' &= \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \end{aligned}$$

Oppure l'operatore combinazione lineare:

$$\hat{O} \equiv \lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot + \lambda_2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due versori ortogonali:

$$\mathbf{a} \mathbf{a} \cdot = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Applichiamo l'operatore a un vettore $\mathbf{c}$:

$$\hat{O} \mathbf{c} \equiv (\lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot + \lambda_2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot) \mathbf{c} = \lambda_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + \lambda_2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$$

Leggiamo come agisce l'operatore:

- proietta $\mathbf{c}$ lungo le direzioni ortogonali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
- moltiplica le proiezioni per le costanti λ_1 e λ_2
- i vettori componenti così ottenuti vengono sommati per produrre il vettore finale.

Applichiamo l'operatore al versore $\mathbf{a}$:

$$\hat{O} \mathbf{a} \equiv \lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}$$

Il risultato non è altro che il vettore $\mathbf{a}$ moltiplicato per la costante λ_1

$$\mathbf{a} \rightarrow \lambda_1 \mathbf{a}$$

Si dice che $\mathbf{a}$ è un autovettore dell'operatore $\hat{O}$ con autovalore λ_1 .

Applichiamo l'operatore al vettore $\mathbf{b}$

$$\hat{O}\mathbf{b} = \lambda_2 \mathbf{b}$$

Si dice che $\mathbf{b}$ è un autovettore dell'operatore $\hat{O}$ con autovalore λ_2 .

Legame tra operatori lineari e variabili fisiche

Un cristallo birifrangente è seguito da due rivelatori di fotoni, uno per ogni fascio secondario, collegati ad un indice con due "posizioni" λ_1 e λ_2 .

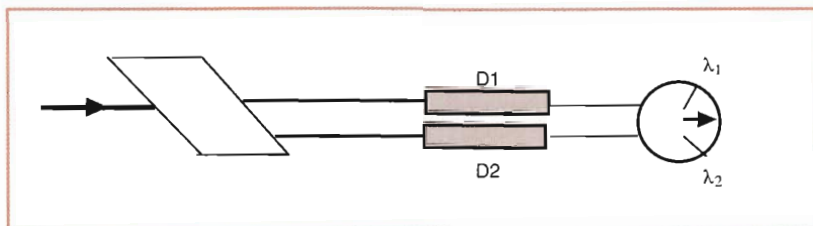
L'indice si porta sulla posizione λ_1 (λ_2) quando un fotone viene segnalato dal rivelatore D1 (D2).

Il risultato della misura è quindi una variabile aleatoria λ , che può assumere soltanto due valori, λ_1 e λ_2 .

Figura 19.

Un fascio di fotoni polarizzati incide su un cristallo di calcite.

Per ogni fotone incidente scatta o solo il rivelatore D1 (indice $m>1$), o solo D2 (indice $m>2$).



Calcoliamo il valore atteso di λ , calcolando il suo valore medio.

Se il vettore $\mathbf{u}$ rappresenta lo stato dei fotoni inviati verso il cristallo:

la probabilità di ottenere λ_1 è data dalla probabilità di rivelazione di D1:

$$P(\lambda = \lambda_1) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)^2$$

La probabilità di ottenere λ_2 è data dalla probabilità di rivelazione di D2:

$$P(\lambda = \lambda_2) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)^2$$

Il valor medio di λ è quindi

$$\langle \lambda \rangle = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + \lambda_2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)^2$$

Con semplici passaggi si può ridurre questa espressione alla forma che riporta all'idea di operatori:

$$\langle \lambda \rangle = \mathbf{u} \cdot [\lambda_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}_1 + \lambda_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}_2]$$

Il vettore in parentesi quadra può essere ottenuto applicando l'operatore

$$\hat{O}_\lambda = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 \cdot + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \cdot$$

al vettore di stato $\mathbf{u}$ che descrive i fotoni interagenti con il nostro apparato di misura.

Il valore atteso λ può essere scritto nella forma particolarmente semplice:

$$\langle \lambda \rangle = \mathbf{u} \cdot \hat{O}_\lambda \mathbf{u}$$

L'operatore $\hat{O}_\lambda$ fornisce una descrizione compatta e completa dell'apparato di misura considerato.

I possibili esiti di una misura coincidono con gli autovalori dell'operatore, mentre i suoi autovettori sono i possibili stati in cui possiamo trovare il fotone dopo la misura.

Il risultato è generale:

per ogni variabile aleatoria, il valor medio di λ è dato da una sommatoria di termini in ciascuno dei quali si evidenziano due fattori significativi:

→ uno dei possibili valori assunti dall'osservabile λ

→ la probabilità del corrispondente evento

come nel nostro caso:

$$\langle \lambda \rangle = \lambda_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + \lambda_2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)^2$$

L'unica cosa di cui abbiamo bisogno è di esprimere le probabilità di transizione nella forma di un prodotto scalare.

Per un sistema fisico generico, dove gli stati vengano rappresentati da vettori n-dimensionali, si ha:

$$\hat{O}_\lambda = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i \cdot$$

dove la sommatoria è ora estesa a tutti gli stati ortogonali in cui possiamo trovare il sistema fisico dopo il processo di misura.

Domande aperte

- Come è possibile determinare i possibili valori di una osservabile fisica?
- Come è possibile definire (e quindi usare) gli operatori associati ad una osservabile fisica?
- Perché gli operatori lineari sono ritenuti un ingrediente essenziale del formalismo quanto-meccanico?

I seguenti due elementi rispondono

- 1) I valori medi delle osservabili fisiche obbediscono alle leggi della fisica classica
- 2) L'equazione

$$\langle \lambda \rangle = \mathbf{u} \cdot \hat{O}_\lambda \mathbf{u}$$

→ mette in relazione il valor medio di una osservabile fisica con il suo operatore

→ permette di "tradurre" le leggi della fisica classica in ben precise relazioni tra gli operatori associati alle osservabili di un sistema fisico.

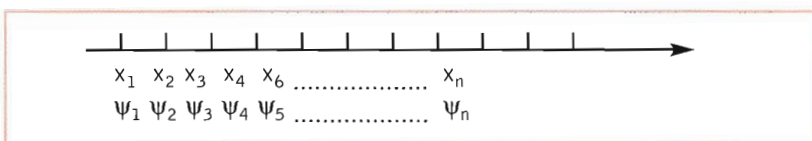
Usualmente, queste relazioni sono sufficienti per caratterizzare gli operatori e determinarne autovalori ed autovettori.

Gli operatori lineari sono lo strumento più efficace per "quantizzare" un sistema fisico, cioè per ottenerne la descrizione quantistica partendo da quella classica.

PARTE III

DAL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE AI CAMMINI DI FEYNMAN*

L'approccio seguito di introduzione alla fisica quantistica e alla costruzione del formalismo nel caso generale conduce all'idea di funzione d'onda. In particolare si possono considerare sovrapposizioni di stati a posizione definita effettuando l'ipotesi semplificativa che lo spazio sia costituito da un insieme discreto di punti.

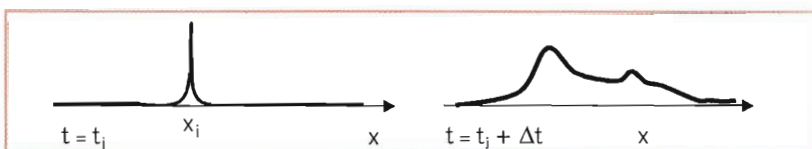


Se una particella ad un certo istante è stata localizzata da un rivelatore in x_i , si escludono tutte le altre possibilità. I diversi possibili esiti delle misure di posizione definiscono proprietà mutuamente esclusive che caratterizzano sistemi in stati ortogonali dal punto di vista geometrico. Mentre in fisica classica gli unici stati possibili sono gli stati a posizione definita (in fisica classica la particella sta per forza in uno solo di questi stati), in meccanica quantistica la particella vive in generale in una sovrapposizione di stati.

Se può rappresentare questo associando ad ogni stato ortogonale un'ampiezza, ossia ad ogni posizione definita x_i si associa l'ampiezza ψ_i .

Si è costruita una funzione $\psi_i(x_i)$, che consiste in sostanza in una sovrapposizione tra stati a posizione definita.

Se all'istante t_i è stata trovata la particella in x_i , la funzione d'onda deve essere diversa da zero solo in un ristretto intorno di x_i (figura sotto a sinistra). Dopo un tempo Δt , la particella non si troverà più in x_i e la funzione d'onda sarà del tipo illustrato a destra.



Per calcolare la funzione d'onda e dire come evolve, ci sono due approcci equivalenti:

a) Equazione di Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(t, x) = i \hbar \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t}$$

b) Formalismo dei cammini di Feynman.

Possiamo seguire questo secondo approccio, che risulta relativamente semplice utilizzando i fasori.

Si cerca la probabilità di trovare la particella in x_2 se al tempo t_1 era stata localizzata in x_1 . Ci sono infiniti modi con cui la particella potrebbe portarsi da x_1 a x_2 . Per ogni percorso si calcola, $e^{i S(\gamma)/\hbar}$

*NOTA: I contenuti del ragionamento qui proposto, sono il risultato del lavoro svolto con R. Ragazzon.

dove

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^t \left[\frac{mv^2(t')}{2} - V(x(t')) \right] dt$$

e quindi si valuta la funzione d'onda come:

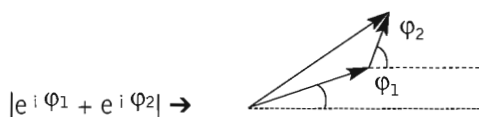
$$\psi(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{\gamma} e^{i S(\gamma) / \hbar}$$

che è una somma (in generale un integrale) su uno spazio funzionale (spazio di funzioni).

In questo approccio è contenuto il principio di sovrapposizione: ogni percorso dà il suo contributo, come se la particella li seguisse contemporaneamente tutti.

Nei problemi concreti i cammini utili sono pochi ed inoltre ogni contributo si può visualizzare. Questo consente di rendere entro certi limiti visualizzabile e più intuitiva la meccanica quantistica.

Esiste infatti una corrispondenza tra i numeri complessi $e^{i\varphi}$ e i vettori di modulo unitario di angolo φ .



Perciò si può associare a ogni percorso un vettore, invece di un numero complesso, e quindi sommare i vettori.

Ogni vettore associato a ciascun percorso è inclinato di un angolo $S(\gamma) / \hbar$.



Poiché si può spezzare l'integrale per il calcolo di S :

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_3} + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}$$

anche il vettore da associare ad ogni percorso si può calcolare sommando i vettori dei singoli tratti. Ogni tratto del percorso contribuisce in modo additivo all'angolo e ogni rotazione corrisponde ad ogni percorso cui è associato un vettore. Questo fatto consente di attribuire una "lancetta" interna ad una particella che ruota secondo il valore di $S(\gamma) / \hbar$.

Nel caso di particella libera:

$$S(\gamma) = \int_{t_i}^t \left[\frac{mv^2(t')}{2} \right] dt'$$

e poiché v è costante:

$$\frac{S(\gamma)}{\hbar} = \frac{E}{\hbar} (t - t_i)$$

Allora in questo caso la lancetta ruota con velocità (angolare) di $E / \hbar$.
Se si è in grado di capire che alcuni percorsi sono dominanti, il calcolo diventa semplice.

Per esempio si può dare risposta alla domanda:

perché una particella libera sembra propagarsi lungo una retta?

Per rispondere dobbiamo chiederci:

qual è la probabilità che la particella, localizzata in A a $t = 0$, si trovi in B all'istante $t = 2\Delta t$?

$$P[(A, 0) \rightarrow (B, 2\Delta t)] = ?$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\hbar} \left[\int_0^{\Delta t} \frac{mv^2}{2} dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \frac{mv^2}{2} dt \right] = \\ &= \frac{m}{2\hbar} \left[\frac{D^2 + x^2}{\Delta t} + \frac{D^2 + (y - x)^2}{\Delta t} \right] \approx \\ &\approx D^2 + x^2 - xy \cong x^2 - xy\end{aligned}$$

Se si rappresenta $\varphi(x)$ in funzione di x si ottengono delle parabole ($\varphi(x) = x^2 - xy$).

Se B è un punto classicamente in ombra, le fasi sono monotone e il vettore di fase è piccolo, ossia vi è bassa probabilità di trovare la particella in B.

La regione di minimo della fase corrisponde a sommare vettori equiversi.

Cosa succede se la fenditura è piccola? Si sommano pochi percorsi, in cui le differenze di cammino sono trascurabili. Ne segue che la probabilità di trovare la particella in zona d'ombra e di luce sono poco diverse.

Il metodo di Feynman nel campo macroscopico riproduce la fisica classica, in quello microscopico evidenzia grosse deviazioni dalla fisica classica.

PARTE IV

ESPERIMENTI*

La proposta sull'insegnamento della meccanica quantistica qui presentata si contestualizza e chiarisce con una collana di esperimenti nel campo della polarizzazione ottica. Si completa e approfondisce con diverse attività sperimentali di ottica fisica. Nella seguente tabella sono riportati i titoli degli esperimenti proposti come cuscino di ottica fisica per la meccanica quantistica, messi a punto nell'ambito dei progetti Secif e FFC del MIUR (PRIN). Molti dei materiali prodotti in tale contesto sono disponibili in rete all'indirizzo: www.fisica.uniud.it/URDF

Emissione di luce da una lampadina

- 1 Temperatura del filamento incandescente
- 2 Efficienza luminosa della lampadina da bicicletta
- 3 Dipendenza dell'illuminamento dalla distanza
- 4 Dipendenza della resistenza elettrica dalla temperatura

Assorbimento di luce ed energia

- 1 Assorbimento di luce ed effetto serra
- 2 Le variabili nell'assorbimento di luce
- 3 Colore e assorbimento di luce
- 4 Filtri colorati
- 5 Quanta luce è visibile

Interferenza da lamina sottile

- 1 Esplorazione qualitativa
- 2 Intensità luminosa riflessa e trasmessa da un cuneo d'aria
- 3 Riflettanza e trasmittanza di sostanze diverse
- 4 Angolo di inclinazione locale delle lastre di vetro del cuneo
- 5 Indice di rifrazione dell'alcool per la luce rossa
- 6 Influenza della lunghezza d'onda su riflettanza e trasmittanza
- 7 Indice di rifrazione dell'acqua per radiazione infrarossa

Diffrazione

Trasmittanza di materiali rifrangenti e polaroid.

Illuminamento a distanza

Polarizzazione e legge di Malus

Potere rotatorio di una soluzione zuccherina

Polarizzazione per riflessione e determinazione dell'angolo di Brewster

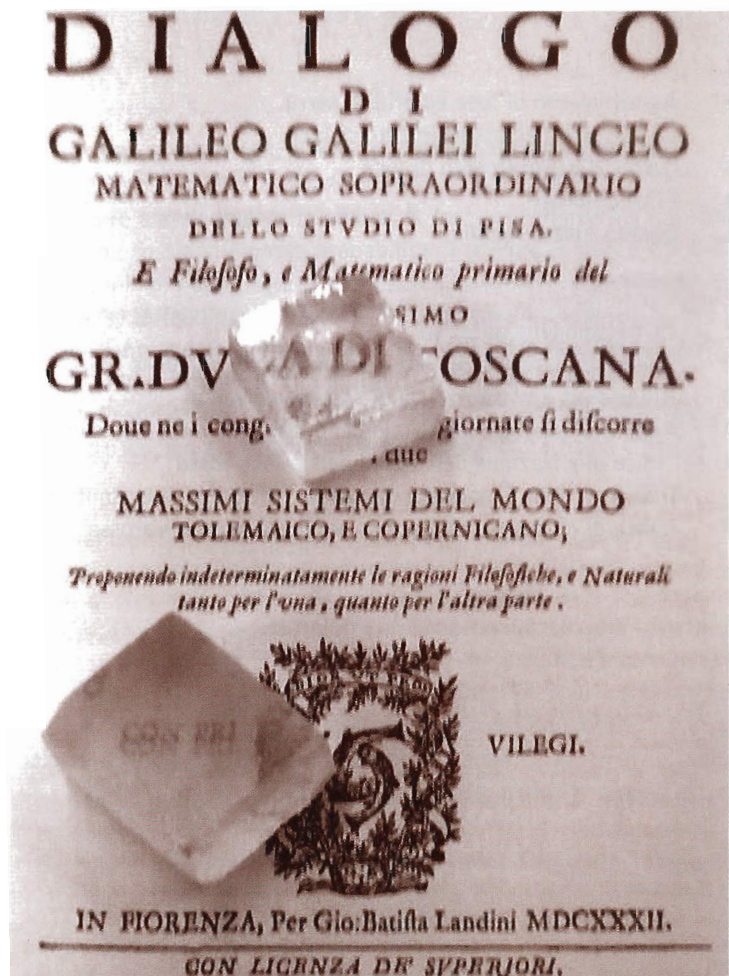
Polarizzazione per birifrangenza

*NOTA: I contenuti del ragionamento qui proposto, sono il risultato del lavoro svolto con R. Ragazzon.

Le sperimentazioni in classe della proposta sulla meccanica quantistica qui presentata sono state realizzate basandosi sulla seguente selezione minimale:

- Esplorazione qualitative della Polarizzazione.
- Legge di Malus.
- Trasmittività di luce attraverso lamine di materiali rifrangenti e trasmissività dei polaroid.
- Esplorazione qualitative della polarizzazione per birifrangenza.

Le schede illustrative sono raccolte nelle pagine seguenti.



LE CARATTERISTICHE DELLA LUCE POLARIZZATA

Finalità

Riconoscere le caratteristiche della luce polarizzata linearmente.

Alternative sperimentali

L'esplorazione, qui proposta utilizzando polaroid posti su una lavagna luminosa, può essere sviluppata con modalità analoghe impiegando altre sorgenti, o anche semplicemente appoggiando più polaroid sovrapposti su un libro. Le diverse modalità di lavoro possono essere adottate in alternativa o in parallelo. Storicamente il riconoscimento della natura trasversale della polarizzazione della luce è stato fatto osservando che fasci di luce polarizzati ortogonalmente non interferiscono.

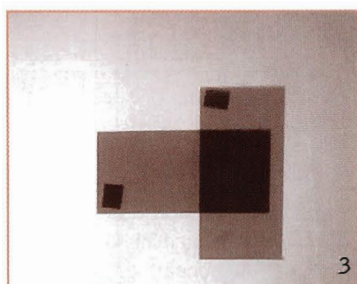
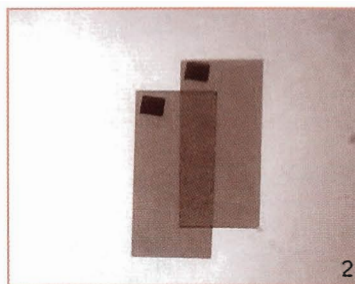
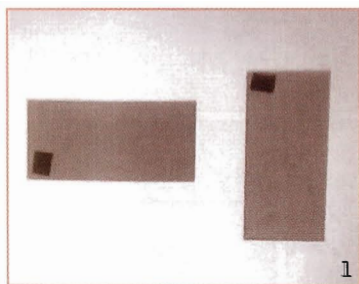
La trasversalità della polarizzazione emerge abbastanza semplicemente come conseguenza del comportamento della luce nell'attraversare i polaroid che vengono ruotati intorno ad un asse parallelo a quello di propagazione della luce.

Materiale necessario

- Tre o più polaroid uguali.
- Tre o più vetrini da microscopio.
- Lavagna luminosa.

Descrizione delle azioni, osservazioni

Viene proposta nel seguito la sequenza di azioni da effettuare con i polaroid sulla lavagna luminosa, le osservazioni che si effettuano sugli esiti dell'intensità luminosa e le prime conclusioni che si possono trarre.



Azioni effettuate Sulla lavagna luminosa...	Osservazioni ed esiti sull'intensità luminosa L'intensità della luce trasmessa....	Commenti
... appoggio un polaroid (Fig.1)	...si riduce di un fattore costante	Parte della luce viene assorbita dal polaroid
... ruoto il polaroid (fig. 1)	...resta costante	La luce del proiettore non è polarizzata
... appoggio due polaroid sovrapposti (Fig. 2)	...si riduce ulteriormente	Il secondo polaroid assorbe sempre parte della luce incidente
... distanzio i due filtri e li ruoto solidalmente	...non cambia	La luce incidente non è polar- izzata e quindi la coppia dei due polaroid si comporta come una qualsiasi coppia di filtri parzialmente assorbenti
... ruoto di un certo angolo uno dei due filtri intorno ad un asse verticale (Fig. 3)	...varia con l'angolo, de- scrivendo una curva pe- riodica, da un massimo ad un minimo per una ro- tazione di 90°	La luce trasmessa dal primo filtro (polarizzatore) presenta una proprietà (polarizzazione) che viene rilevata dal secondo filtro (analizzatore). Tale proprietà si evidenzia ruotando uno dei due filtri.
... appoggio un terzo filtro su due filtri disposti in modo da avere un minimo di trasmissione (Fig. 4)	...non cambia, resta minima la trasmissione di luce	Quando due filtri consecutivi sono disposti in modo da avere un minimo di trasmis- sione (polaroid incrociati) la presenza di un terzo filtro è ininfluente
... inserisco un terzo filtro tra due filtri disposti in modo da avere un minimo di trasmissione e lo ruoto intorno ad un asse verticale (Fig. 4)	...varia con l'angolo di rotazione, descrivendo una curva periodica, da un massimo ad un minimo per una rotazione di 45°	L'ordine con cui sono disposti i polaroid influenza in modo decisivo l'intensità della luce trasmessa

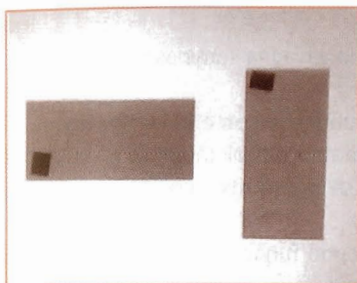


Figura 1.
Polaroid disposti separatamente sulla lavagna luminosa: l'intensità della luce è indipendente dal modo in cui vengono disposti i polaroid.

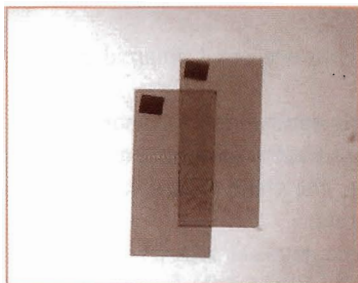


Figura 2.
Quando si sovrappongono due polaroid l'intensità della luce trasmessa viene ulteriormente ridotta. In questo caso i due polaroid sono disposti con i piani di trasmissione paralleli.

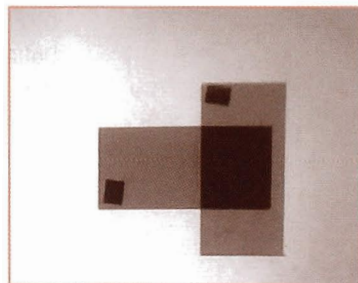


Figura 3.
Se si ruota uno dei due polaroid rispetto all'altro l'intensità della luce trasmessa diminuisce progressivamente fino ad annullarsi quando i due polaroid sono disposti ortogonalmente (piani di trasmissione ortogonali).

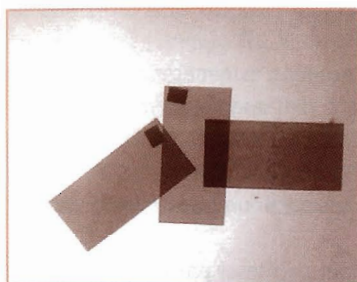


Figura 4.
Tre polaroid vengono disposti su una lavagna luminosa. Nella foto (forse sarebbe meglio immagine) su uno di essi sono appoggiati gli altri due con orientazioni diverse. Nella foto al centro sopra due polaroid incrociati è posto un terzo polaroid a 45° : l'intensità della luce trasmessa attraverso la zona di sovrapposizione dei due polaroid incrociati è comunque nulla. Nella foto a destra il terzo polaroid è inserito tra gli altri due incrociati: l'intensità della luce trasmessa cambia sensibilmente per l'inserimento del terzo polaroid.

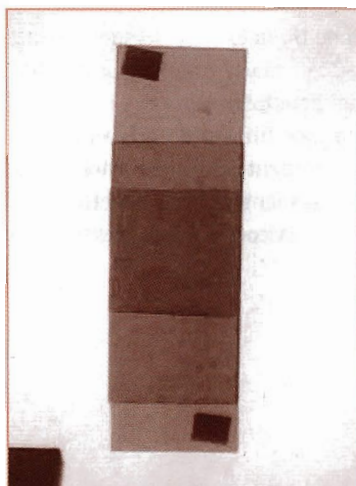
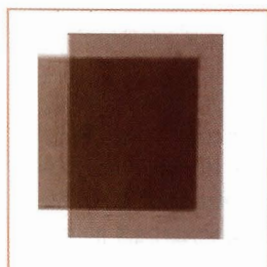


Figura 5.
Nella foto a destra tre polaroid sono parzialmente sovrapposti con piani permessi paralleli. Le diverse zone sono più o meno scure, a seconda del numero di polaroid sovrapposti. La parte centrale più scura, dove tutti e tre i polaroid sono sovrapposti, trasmette comunque più luce di quella trasmessa da due polaroid incrociati (parte centrale della foto a sinistra riprodotta per il confronto).

Discussione dei risultati

Dall'esplorazione con i polaroid disposti sulla lavagna luminosa si riconosce che:

- la luce emessa dalle ordinarie sorgenti luminose non è polarizzata;
- la luce trasmessa da un polaroid presenta una proprietà, detta polarizzazione, che viene evidenziata quando essa passa attraverso un secondo polaroid;
- il primo polaroid polarizza la luce, il secondo funge da analizzatore della polarizzazione della luce trasmessa dal primo;
- l'intensità della luce trasmessa è correlata in modo periodico all'angolo formato tra due direzioni fissate sui polaroid e ortogonali alla direzione di propagazione della luce;
- esistono due disposizioni relative dei polaroid per cui l'intensità della luce trasmessa è massima e due per cui è minima;
- si passa da un massimo di trasmissione a un minimo per una rotazione relativa dei polaroid di 90° ;
- ogni polaroid ammette un piano permesso di trasmissione;
- la polarizzazione è una proprietà trasversale rispetto alla direzione di propagazione della luce;
- per analizzare quantitativamente il fenomeno è necessario misurare l'intensità della luce trasmessa al variare dell'angolo formato tra due direzioni fissate sui polaroid ortogonali alla direzione di propagazione della luce;
- la luce trasmessa da un polaroid viene attenuata di un fattore indipendente dall'orientazione del polaroid stesso;
- la sovrapposizione di più polaroid con piani permessi paralleli determina l'attenuazione successiva della luce trasmessa (come si ha sovrapponendo strati successivi di un normale materiale rifrangente);
- l'intensità della luce trasmessa da più polaroid disposti in successione e con piani permessi non paralleli, dipende in modo decisivo dall'ordine con cui sono disposti i polaroid stessi: se due polaroid successivi hanno piani permessi incrociati si ha un minimo di trasmissione (quasi completa estinzione del fascio); se fra due polaroid incrociati si dispone un terzo polaroid con direzione intermedia tra quella degli altri due, si ha di nuovo trasmissione di luce.

Considerazioni conclusive

L'analisi della luce filtrata da un primo polaroid e osservata attraverso uno o più polaroid consente di evidenziare le caratteristiche distintive della luce polarizzata linearmente. Il suo aspetto trasversale rispetto alla direzione di propagazione è una conseguenza delle caratteristiche peculiari dei polaroid.

LA LEGGE DI MALUS

Finalità

Misurare l'andamento dell'intensità della luce trasmessa da due polaroid in funzione dell'angolo formato dai piani di trasmissione dei polaroid e individuare la relazione che intercorre tra le due grandezze.

Alternative sperimentali

La legge di Malus descrive gli aspetti peculiari dei fenomeni relativi alla polarizzazione lineare. Può essere pertanto introdotta, oltre che con i polaroid, anche utilizzando normali lamine rifrangenti o cristalli birifrangenti. La semplicità con cui si opera con i polaroid, consente di effettuare rapidamente misure con un buon grado di precisione.

Per effettuare questa misura è necessario disporre di una sorgente che emette luce con intensità sufficientemente costante nel tempo, come una normale lampadina collegata ad un alimentatore stabilizzato, di un misuratore di intensità luminosa e di due polaroid di cui almeno uno montato su supporto ruotante.

Per misurare l'angolo fra le direzioni di trasmissione dei due polaroid si può utilizzare un goniometro solidale con il supporto ruotante del polaroid, oppure si può utilizzare sensori collegati in linea con il computer. In quest'ultimo caso si può per esempio connettere rigidamente il supporto ruotante di uno dei polaroid ad una smart-pulley o a un reostato.

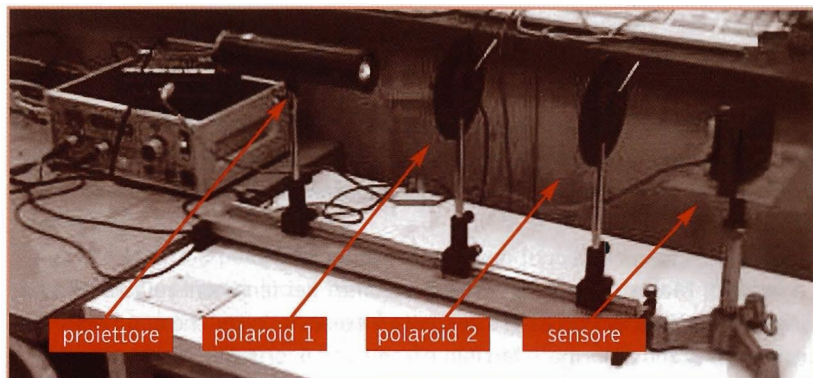
L'intensità luminosa può essere misurata direttamente ad esempio con:

- un sensore di luce,
- un esposimetro per fotografie,
- un fotodiodo o un fototransistor,
- un tradizionale fotometro di Bunsen,
- un luxmetro.

Materiale necessario

- Banco di lavoro di oltre 1 metro.
- Lampada a filamento (5V, 6A) su relativo supporto.
- Alimentatore stabilizzato Bassa Tensione.
- Sensore di luce e interfaccia (ad esempio: Pasco scientific Science Workshop / interfaccia 500 CI-6765CI / sensore-6504A, sensore di luce Pasco [<http://www2.pasco.com/products>]).
- Due Polaroid su supporto ruotante dotati di goniometro.
- Un banco ottico della lunghezza di almeno 50 cm e un tavolino elevabile possono essere utili per semplificare l'assemblaggio.

Figura 1.
Assemblaggio del
materiale.
Il proiettore
(a sinistra), i due
polaroid (al centro) e
il sensore (a destra)
sono allineati in modo
da garantire il buon
illuminamento di
quest'ultimo.



Il materiale viene assemblato come in Figura 1.

Si posiziona il misuratore di intensità luminosa in modo tale che la sua superficie sia disposta perpendicolarmente alla direzione della luce incidente e completamente illuminata.

Si posizionano i due polaroid in modo da mantenere l'illuminazione del sensore. Non è necessario effettuare un perfetto allineamento per ottenere buoni risultati.

Principio della misura

Si misura l'intensità luminosa trasmessa da due polaroid al variare dell'angolo formato tra i piani di trasmissione.

Descrizione della procedura

Si rileva l'intensità luminosa al variare dell'angolo tra le direzioni permesse dei due polaroid a partire dalla situazione per cui si ha un massimo (polaroid con piani di trasmissione paralleli) o un minimo di trasmissione (polaroid con piani di trasmissione ortogonali). Poiché la luce prodotta dalla lampada può presentare una debole polarizzazione è in genere conveniente fissare la posizione del primo polaroid (polarizzatore) e ruotare il secondo polaroid (analizzatore).

Calibrazione del sensore di luce. Si calibra il sensore in modo che indichi circa 90% della sua portata massima quando si ha un massimo di trasmissione.

Acquisizione dati.

Attivata la misura si acquisisce il valore dell'intensità luminosa misurata dal sensore per ogni rotazione dell'analizzatore di 10° . Si effettuano misure tra 0° e 180° o tra 0° e 90° .

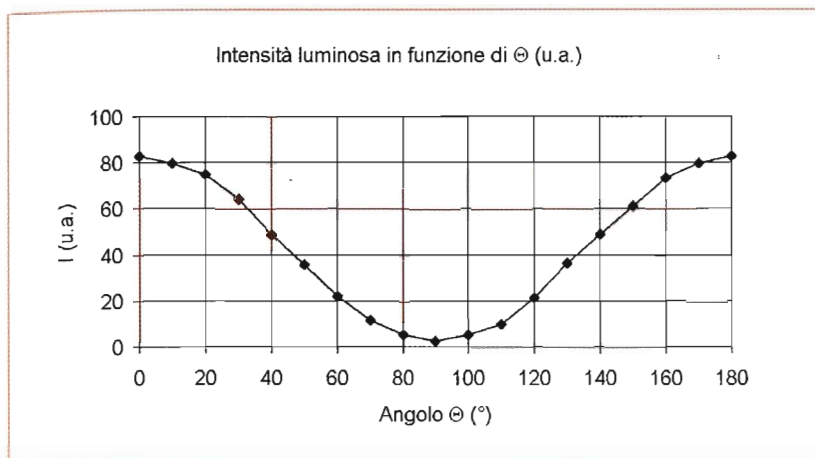


Figura 2.

Dati campione

Figura 2 . Intensità luminosa misurata dal sensore in funzione dell'angolo Θ formato dai piani di trasmissione del polarizzatore e dell'analizzatore per angoli che variano da 0° a 180°

In figura 2 è riportata l'intensità luminosa misurata dal sensore in funzione dell'angolo formato dalle direzioni di trasmissione del polarizzatore e dell'analizzatore per angoli che variano da 0° a 180° . La posizione angolare dell'analizzatore è stata fissata con una indeterminazione di 2° . Le differenze che si rilevano nelle intensità luminose misurate per esempio a 70° e a 110° o a 30° e 150° sono compatibili con l'indeterminazione sulla posizione angolare dell'analizzatore. La sostanziale simmetria del grafico rispetto a $\Theta = 90^\circ$ evidenzia la periodicità di $I(\Theta)$ al variare del suddetto angolo.

Elaborazione dati

Per determinare l'esplicita dipendenza funzionale dell'intensità luminosa dall'angolo Θ , formato dai piani di trasmissione dei due polaroid, è conveniente considerare solo la parte relativa all'intervallo $0^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$ (figura 3A). Si riportano i dati dell'intensità misurata dal sensore in funzione di $\cos^2 \Theta$ (fig.3B).

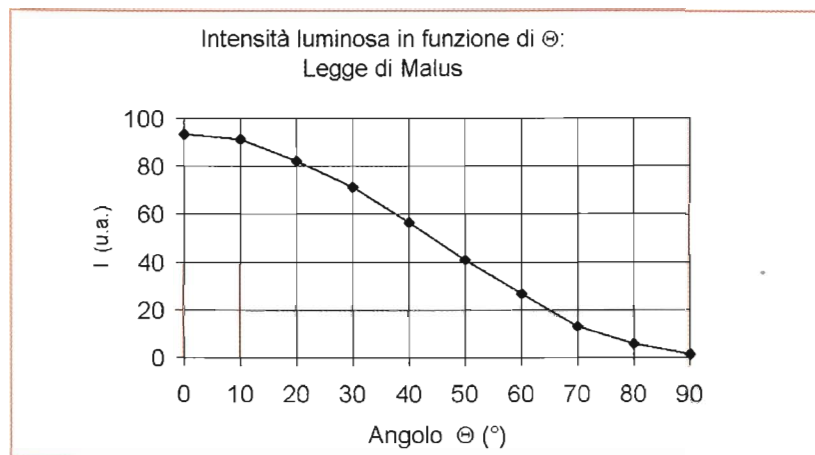


Figura 3A.

Figura 3B.

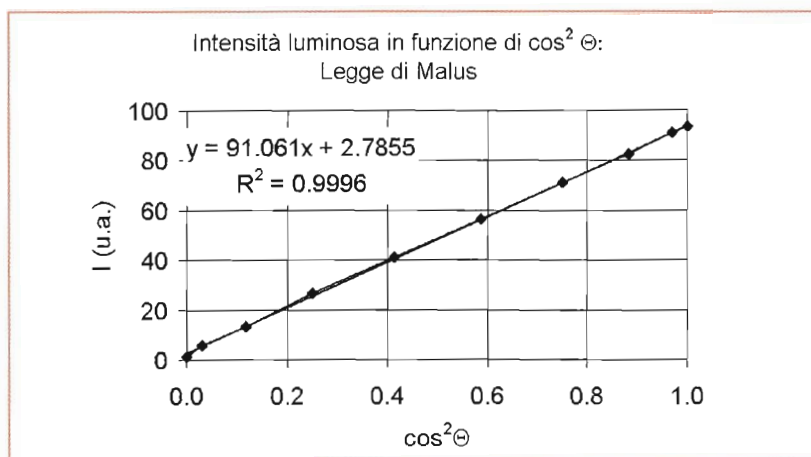


Figura 3. Nei due grafici è riportata l'intensità luminosa misurata dal sensore in funzione di Θ (grafico A) e in funzione di $\cos^2 \Theta$ (grafico B). Nel grafico B è riportata anche la linea di tendenza, la sua equazione e il coefficiente di correlazione.

Discussione dei risultati

Il valore di 0.9997 del coefficiente di correlazione consente di ritenere che tra I e $\cos^2 \Theta$ sussista una relazione lineare con un grado di affidabilità maggiore del 95%. L'analisi condotta porta a stabilire che l'intensità della luce trasmessa da due polaroid, i cui piani di trasmissione formano un angolo Θ , è data dalla seguente relazione:

$$I(\Theta) = I_{\max} \cos^2(\Theta) \quad (1)$$

Considerazioni conclusive

L'analisi quantitativa dell'intensità luminosa trasmessa da due polaroid al variare dell'angolo formato dai loro piani di trasmissione porta alla relazione (1). Questa relazione, nota come legge di Malus, consente di descrivere gli aspetti caratteristici dell'interazione della luce con polaroid. È inoltre la base descrittiva su cui fondare una esplorazione quantitativa dei diversi fenomeni in cui si ha luce polarizzata, come per esempio la riflessione e la birifrangenza. Costituisce il riferimento attraverso cui costruire una interpretazione formalizzata della fenomenologia della polarizzazione della luce.

TRASMITTIVITÀ DI UN POLAROID

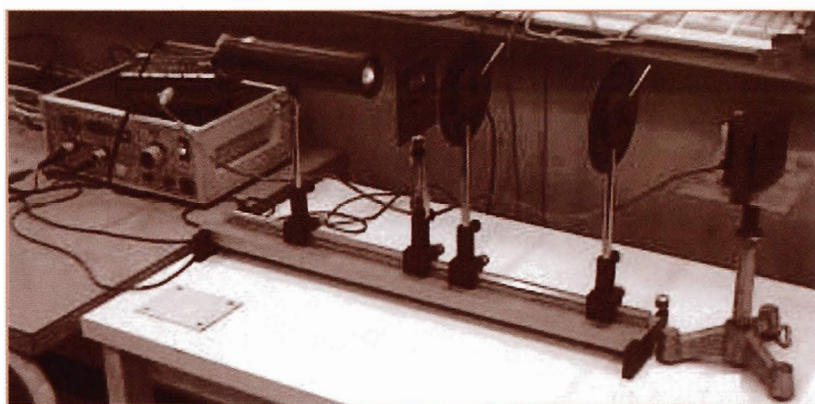
Finalità

Riconoscere che un polaroid attenua di un fattore costante la luce che incide su di esso per effetti non legati alla polarizzazione.

Materiale necessario

- Banco di lavoro di oltre 1 metro.
- Lampada a filamento (5V, 6A) su relativo supporto.
- Alimentatore stabilizzato Bassa Tensione.
- Sensore di luce e interfaccia (ad esempio: Pasco scientific Science. Workshop / interfaccia 500 CI-6765CI / sensore-6504A, sensore di luce Pasco [<http://www2.pasco.com/products>]).
- Almeno tre Polaroid uguali e relativo supporto.
- Un banco ottico della lunghezza di almeno 50 cm e un tavolino elevabile possono essere utili (ma non sono necessari) per semplificare l'assemblaggio.

Il materiale viene assemblato come in figura 1.



Principio della misura

Si misura l'intensità della luce trasmessa da più polaroid con piani di trasmissione paralleli.

Descrizione della procedura

Si dispongono sensore e proiettore ad una fissata distanza in modo che la parte sensibile del sensore sia ben illuminata dal fascio di luce prodotto dal proiettore e si acquisisce l'intensità luminosa misurata dal sensore. Si interpongono tra il proiettore e il sensore 1, 2, 3 polaroid orientati con piani di trasmissione paralleli ed ogni volta si acquisisce l'intensità luminosa misurata dal sensore.

Dati campione

Nella figura 2 è riportato un diagramma intensità luminosa - tempo ottenuto seguendo la procedura indicata.

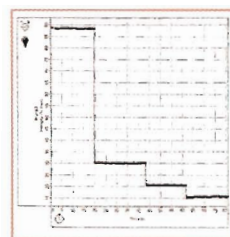


Figura 2. Intensità luminosa misurata dal sensore in funzione del tempo: nell'intervallo 0-20 s la luce del proiettore incide direttamente sul sensore; tra 20 e 43 s tra proiettore e sensore è stato interposto 1 polaroid; tra 43 s e 62 s 2 polaroid; tra 62 s e fino al termine della misura 3 polaroid.

Elaborazione dati

Detta I_0 l'intensità della luce incidente sul sensore, I_1 l'intensità della luce trasmessa dal primo polaroid, I_2 e I_3 quella trasmessa dal secondo e dal terzo polaroid rispettivamente, si valutano i rapporti:

$$T = \frac{I_2}{I_1} \quad T' = \frac{I_3}{I_2}$$

tra l'intensità di luce trasmessa e quella polarizzata incidente su un polaroid quando si ha un massimo di trasmissione. Si confrontano i valori ottenuti. Dopo aver stimato il rapporto:

$$R_0 = \frac{I_1}{I_0}$$

tra l'intensità della luce (polarizzata) trasmessa dal primo polaroid e quella incidente (non polarizzata) e si determina il rapporto:

$$K = \frac{R_0}{T}$$

Nella tabella sottostante sono riportati i valori delle intensità misurate. In tutti i casi l'errore massimo sull'intensità luminosa misurata dal sensore è pari a 1 u.a.

intensità (u.a.): $I_0 = 89$, $I_1 = 30$, $I_2 = 21$, $I_3 = 16$,

Si ricavano le seguenti stime dei rapporti: T T' R_0 K

$$T = 0.70 \pm 0.06$$

$$T' = 0.76 \pm 0.08$$

$$R_0 = 0.34 \pm 0.02$$

$$K = R_0 / T = 0.49$$

$$K = R_0 / T' = 0.45$$

Discussione dei risultati

Dall'elaborazione dei dati emerge che la luce polarizzata che incide su un polaroid con piano di trasmissione orientato in modo da avere un massimo di trasmissione viene attenuata di un fattore costante T , nel caso specifico pari a 0.73 ± 0.08 .

Tale è la frazione di luce che non viene trasmessa dal polaroid per effetti non connessi alla polarizzazione e presenti anche quando la luce viene trasmessa da una lamina di un ordinario materiale rifrangente (riflessione della luce incidente, assorbimento della luce che attraversa la lamina, diffusione).

Della luce non polarizzata emessa dal proiettore incidente sul primo polaroid viene trasmessa una frazione R_0 che nel caso specifico vale 0.34 ± 0.2 .

Il rapporto R_0/T esprime la frazione di luce trasmessa dal primo polaroid come effetto della sua azione di polarizzatore della luce. Tale fattore è pari a 0.47 ± 0.08 .

Considerazioni conclusive

Quando luce polarizzata linearmente incide su un polaroid si riconosce che non viene trasmessa:

- una frazione costante di essa, come avviene in un qualsiasi mezzo rifrangente;
- una frazione ulteriore, funzione dell'angolo formato dal piano di vibrazione dell'onda e il piano di trasmissione del polaroid, in base alla legge di Malus. Si può quindi caratterizzare formalmente l'azione di un polaroid nel seguente modo:

$$I_T = I_i T \cos^2 \Theta \text{ [luce incidente polarizzata]}$$

dove I_T è l'intensità della luce trasmessa dal polaroid, quando su di esso incide luce polarizzata di intensità I_i , T è il coefficiente di trasmissione del polaroid e Θ è l'angolo formato dal piano di vibrazione della luce e il piano di trasmissione del polaroid.

Se la luce incidente non è polarizzata, l'intensità della luce trasmessa è data da:

$$I_T = T \frac{1}{2} I_i$$

Il fattore $1/2$ è dovuto all'azione di polarizzatore che ha il polaroid sulla luce incidente (i valori ottenuti per K sono compatibili con il valore di 0.5).

Esso può essere ottenuto nel seguente modo. Si interpreta la luce non polarizzata come formata da infinite componenti polarizzate linearmente e ciascuna di intensità dI_T data da:

$$dI_T = T \frac{d\Theta}{2\pi} I_i \cdot T \cdot \cos^2 \Theta$$

Essa è l'intensità della frazione di luce trasmessa che vibra in direzione compresa tra Θ e $\Theta + d\Theta$. L'intensità totale della luce trasmessa dal polaroid è allora data da:

$$I_T = T \int_0^{2\pi} \frac{T_i}{2\pi} T \cos^2 \Theta d\Theta = I_i T \frac{1}{2}$$

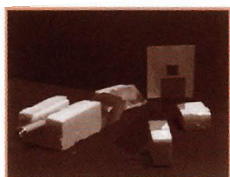


Figura 1.
Materiale necessario
per l'esperienza.

INTERAZIONE DI LUCE POLARIZZATA CON UN CRISTALLO BIRIFRANGENTE

Finalità

Riconoscere che un cristallo birifrangente su cui incide un fascio di luce polarizzata dà luogo in generale a due fasci trasmessi che emergono dal cristallo parallelamente alla direzione di incidenza e hanno polarizzazioni mutuamente ortogonali.

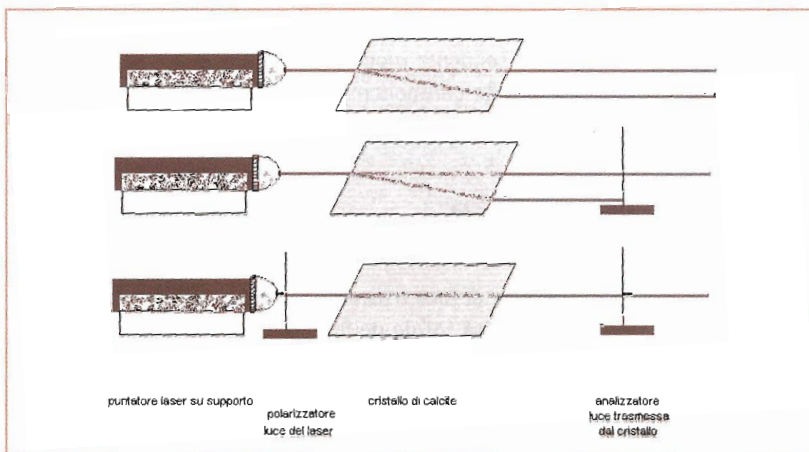
Alternative sperimentali

L'esplorazione delle proprietà della luce trasmessa da un cristallo birifrangente qui proposta per mezzo della luce laser può essere effettuata anche utilizzando un fascio di luce polarizzata trasmesso da un polaroid e su cui incide un fascio di luce non polarizzata sufficientemente intenso e ben collimato.

Materiale necessario

- Un puntatore laser
- Due o più polaroid
- Un cristallo birifrangente (calcite tipo spato d'Islanda)
- Supporti di varia forma
- Un generatore B.T. stabilizzato, può essere utile per alimentare il puntatore laser.

Figura 2.
Assemblaggio del
materiale.



Il materiale va assemblato come nelle esemplificazioni di figura 2.

- a) Il puntatore laser è disposto sul supporto.
La sua luce incide direttamente sul cristallo di calcite.
- b) La luce trasmessa dal cristallo viene analizzata con un polaroid (nel caso specifico rappresentato, esso assorbe completamente il fascio straordinario, trasmette quello ordinario).
- c) Un polaroid disposto all'uscita del puntatore laser polarizza la luce secondo un fissato piano. Il polaroid disposto oltre il cristallo analizza la luce trasmessa da esso (nel caso specifico il polarizzatore produce un fascio che ha la stessa polarizzazione del fascio ordinario).

Principio della misura

Con un polaroid si analizza la polarizzazione della luce trasmessa da un cristallo birifrangente, quando su di esso incide un fascio di luce polarizzato (il fascio di un puntatore laser).

Descrizione della procedura ed osservazioni da effettuare

1. Direzione di propagazione dei fasci di luce. Si fa incidere il fascio laser su una delle facce di un cristallo di calcite. Si osservano su uno schermo due immagini luminose dei due fasci, ordinario e straordinario, trasmessi dal cristallo.

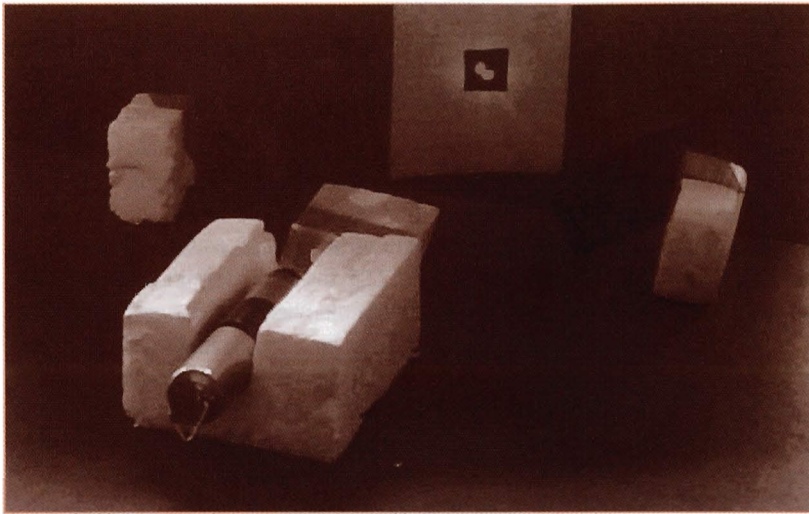


Figura 3.
Il doppio fascio
prodotto nei cristalli
birifrangenti.

Si allontana lo schermo e si osserva che la posizione delle due immagini e la distanza tra esse resta invariata. Si riconosce che i due fasci trasmessi dal cristallo si propagano lungo direzioni parallele.

Si rimuove il cristallo. Si osserva che l'immagine formata dal fascio emesso dal puntatore si trova vicino alle due immagini precedentemente osservate. Si riconosce che i fasci che emergono dal cristallo si propagano parallelamente alla direzione di incidenza. Il cammino dei fasci di luce incidente e trasmessa può essere visualizzato con del fumo di sigaretta o di incenso.

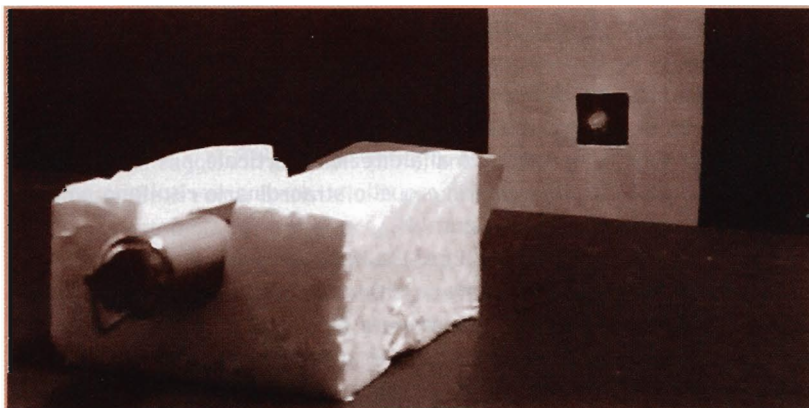
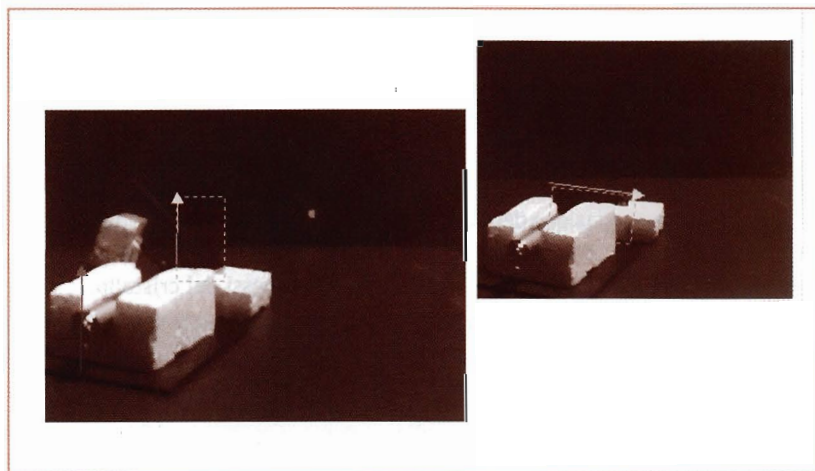


Figura 4.
Si analizza la
polarizzazione della
luce laser disponendo
il polaroid in modo da
avere un massimo di
trasmissione e quindi
lo si ruota fino alla
estinzione del fascio
(quasi totale).

Figura 5

Si analizza la polarizzazione della luce trasmessa dal cristallo. Ciascuno dei due fasci risulta polarizzato ortogonalmente all'altro e a 45° rispetto alla luce incidente.



2. Polarizzazione della luce incidente e intensità dei fasci trasmessi

Si ruota il puntatore intorno al suo asse. L'intensità di ciascuno dei due raggi varia periodicamente con due situazioni estreme che si osservano per orientazioni del puntatore, che differiscono di 90° fra loro: in un caso si estingue il fascio straordinario e si trasmette il solo fascio ordinario con intensità massima, nell'altro caso si estingue il fascio ordinario e si trasmette il solo fascio straordinario con intensità massima. Se si orienta il puntatore a 45° rispetto alle situazioni estreme l'intensità dei due raggi (ordinario e straordinario) sono uguali.

Se si ripetono le osservazioni nel caso di luce incidente non polarizzata, si osserva che i fasci trasmessi dal cristallo risultano avere la stessa intensità.

3. Si dispone il puntatore laser in una posizione fissa, in modo che nel cristallo si trasmettano due fasci di uguale intensità (il puntatore laser è orientato a 45° rispetto alle situazioni estreme in cui all'interno del cristallo si propaga uno solo dei due fasci) (Figura 4). Con un polaroid si analizza la polarizzazione del fascio laser.

Si osserva un massimo di trasmissione quando il polaroid è disposto verticalmente.

Si può assumere che detta direzione coincida con quella di vibrazione della luce incidente.

Con un polaroid si analizza la polarizzazione dei due fasci di luce trasmessi dal cristallo.

Si osserva un massimo di trasmissione per il fascio ordinario con il polaroid ruotato di -45° e un massimo di trasmissione per il fascio straordinario ruotando il polaroid di $+45^\circ$ rispetto alla direzione verticale.

Si riconosce che il fascio ordinario e quello straordinario risultano polarizzati ortogonalmente fra loro (Figura 5).

L'analisi della polarizzazione dei fasci trasmessi permette di riconoscere che il fascio ordinario, indipendentemente dalla sua intensità e quindi indipendentemente dall'orientazione del puntatore laser, ha sempre la stessa polarizzazione. Tale polarizzazione è sempre ortogonale a quella del fascio straordinario

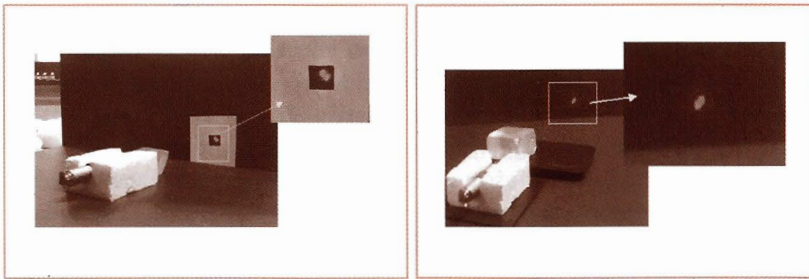


Figura 6.
Nelle foto le immagini formate dai due raggi sono disposte su diagonali opposte per una rotazione di 180° del cristallo

4. Rotazione del fascio straordinario intorno al fascio ordinario. Se si ruota di 180° il cristallo intorno alla direzione del fascio incidente si osserva che uno dei due fasci ruota intorno all'altro.

5. Asse ottico

Si varia l'angolo di incidenza del fascio del puntatore laser, a partire dalla normale. Si osserva che in genere si propagano sempre due fasci nel cristallo tranne che per una direzione particolare per cui nel cristallo si propaga un unico fascio.

Tale direzione risulta parallela alla retta equidistante dagli spigoli, che si dipartono da un unico vertice e formano angoli ottusi fra loro.

Se sul cristallo incide luce parallela a tale direzione si osserva che nel cristallo si propaga sempre un solo fascio.

Tale direzione particolare prende il nome di asse ottico del cristallo e coincide con la direzione di massima simmetria del cristallo stesso.

Le osservazioni vanno eventualmente ripetute con la luce non polarizzata di un proiettore.

Discussione dei risultati

La luce che incide su un cristallo birifrangente subisce in generale una doppia rifrazione, ad eccezione di casi particolari in cui incide secondo una ben definita direzione [l'asse ottico – punto 5] o ha polarizzazione particolare [punto 2].

Poiché i fasci emergenti dal cristallo si propagano nella stessa direzione della luce incidente [punto 1], tale doppia rifrazione avviene con modalità complementari in ingresso e in uscita dal cristallo. Le modalità con cui avviene la doppia rifrazione sono legate alla struttura geometrica del cristallo. In particolare l'asse ottico del cristallo è parallelo all'asse di maggiore simmetria del reticolo cristallino [punto 5].

La orientazione spaziale del cristallo determina oltre che la direzione di deflessione del raggio rifratto [punto 4], anche la polarizzazione dei due fasci trasmessi. Se si ruota il cristallo di un certo angolo intorno alla direzione di propagazione della luce, si osserva che il raggio ordinario ruota dello stesso angolo intorno al raggio ordinario [punto 4].

Il fascio ordinario e quello straordinario risultano polarizzati linearmente ortogonalmente l'uno rispetto all'altro per luce incidente sia non polarizzata, sia polarizzata. I piani di vibrazioni della luce non dipendono dalla polarizzazione della luce incidente [punto 3], mentre l'intensità di ciascun fascio

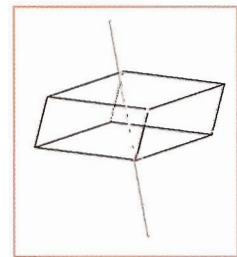


Figura 7.
Rappresentazione dell'asse ottico di un cristallo di calcite.

varia con la polarizzazione della luce incidente. Per luce incidente non polarizzata i due fasci risultano avere la stessa intensità. Per luce incidente polarizzata linearmente nello stesso modo del fascio ordinario, quest'ultimo ha intensità massima, mentre si estingue il fascio straordinario. Se si ruota il piano di vibrazione della luce incidente (ruotando il puntatore laser intorno al suo asse), l'intensità del fascio ordinario si riduce, mentre aumenta quella del fascio straordinario, fino a che, per una rotazione di 90° del piano di vibrazione della luce incidente, si ha intensità massima per il fascio straordinario e nulla per quello ordinario. I due fasci hanno uguale intensità per luce incidente polarizzata a 45° rispetto alla polarizzazione di ciascuno dei due fasci [punti 2-3]. Tali osservazioni risultano consistenti con il fatto che le intensità dei due fasci varino secondo la legge di Malus.

Considerazioni conclusive

La doppia rifrazione della luce in un cristallo di calcite avviene con modalità diversa per il raggio ordinario, per cui vale la legge di Cartesio Snell, e per quello straordinario, per cui essa non vale. In entrambi i casi invece vale il principio della reversibilità del cammino ottico. Ciò è consistente con le osservazioni per cui nel cristallo si propaga solo il fascio ordinario o solo quello straordinario quando su di esso incide luce che ha la stessa polarizzazione del raggio ordinario o rispettivamente di quello straordinario.

Le proprietà di polarizzazione della luce trasmessa dal cristallo dipendono dalla geometria del cristallo stesso. In particolare in direzione parallela all'asse di simmetria geometrica del reticolo cristallino la luce si propaga come in un ordinario mezzo omogeneo. Evidenzia invece un comportamento anomalo quando si propaga lungo direzioni differenti secondo cui si manifesta anche l'anisotropia del cristallo stesso. Il fascio ordinario e quello straordinario risultano sempre polarizzati linearmente ortogonalmente l'uno rispetto all'altro, con piani di vibrazioni che non dipendono dalla polarizzazione della luce incidente. L'intensità di ciascun fascio varia con la polarizzazione della luce incidente con una modalità che induce a ritenere valida anche nel caso della birifrangenza la legge di Malus.

BIBLIOGRAFIA

A CARATTERE DIDATTICO GENERALE

- A. LORIA, C. MALAGODI, M. MICHELINI, *School Quantum Physics, in Structure of matter in the School*, Budapest, 1979.
- R. FEYNMAN, QED, *La strana teoria della luce*, ADELPHI, 1985.
- J. S. BELL, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1987.
- S. SONEGO, *Conceptual foundations of quantum theory: a map of the land*, Ann de la Fond, L. de Broglie 17, 405 (1992); S. Sonego errata: ibid. 18, 131, (1993).
- J. S. TOWNSEND, *A Modern Approach to Quantum Mechanics*, New York, McGraw-Hill, 1992.
- *Proposte didattiche per l'insegnamento della fisica quantistica*, Q2 di LFNS, 1993.
- E. FABRI, *Come introdurre la fisica moderna nella scuola secondaria superiore*, LFNS XXIX, n 01 suppl. genn. marzo, p.63-80, 1996.
- G. C. GHIRARDI, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Milano, Il Saggiatore, 1997.
- *Temi di fisica moderna*, Q7 di LFNS, 1997.
- *Memorie storiche di fisica*, Q8 di LFNS, 1998.
- E.F. TAYLOR, S. VOKOS, J.M. O'MEARA, *Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory*, Computers in Physics 12, p.190, 1998.
- M. GILIBERTI, L. CAZZANIGA, G.M. PROSPERI, G. RINAUDO, L. BORELLO, A. CUPPARI, G. ROVERO, M. MICHELINI, L. SANTI, S. SCIARRATTA, A. SONEGO, R. RAGAZZON, A. STEFANEL, G. GHIRARDI, *Proposte per l'insegnamento della meccanica quantistica* in SeCiF, Atti del Convegno "Didamatica 2002, Informatica per la didattica", Liguori, p. 15, 2002.

LE BASI DELLA PROPOSTA

- G. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *A Fundamental Concept in Quantum Theory: The Superposition Principle*, in *Thinking Physics for Teaching*, Aster, Plenum Publishing Corporation, p.329, 1995.
- G. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *The linear superposition principle and non classical features of microphenomena*, short contribute in *Teaching the Science of Condensed Matter and New Materials*, GIREP-ICPE Book, Forum, 1996.
- G. GHIRARDI, R. GRASSI, M. MICHELINI, *Introduzione delle idee della fisica quantistica e il ruolo del principio di sovrapposizione lineare*, La Fisica nella Scuola, XXX, 3 Sup., Q7, p.46-57, 1997.
- A. STEFANEL, *Un'esperienza sul campo di introduzione della fisica quantistica nella scuola secondaria superiore*, La Fisica nella Scuola, XXX, 3 sup., Q7, 1997.

GLI SVILUPPI

- M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Una proposta operativa a confronto con diversi approcci alla meccanica quantistica nella scuola secondaria superiore*, La Fisica nella Scuola, XXXII, 3, p.196, 1999.

- R. RAGAZZON, *From photons and polaroids to the modern formalism of Quantum Mechanics: let the indices run*, WIREScripT Magazine – Education, May 2000, <http://www.wirescript.com>.
- M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Proposal for quantum physics in secondary school*, Phys. Educ. 35(6), p.406, 2000.
- A. STEFANEL, *Interazione di fotoni con polarizzatori e cristalli birifrangenti per l'introduzione del concetto di stato quantico*, La Fisica nella Scuola, XXXIV, 1 supplemento, 2001.
- M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Quantum Physics as a way of thinking: an educational proposal*, in Phyteb 2000, Elsevier, Paris, p.479, 2001.
- M. COBAL, F. CORNI, M. MICHELINI, L. SANTI, A. STEFANEL, *A resource environment to learn optical polarization*, in Physics in new fields, Girep International Conference proceedings, Lund, 2002.
- M. MICHELINI, L. SANTI, A. STEFANEL, G. MENEGHIN, *A resource environment to introduce quantum physics in secondary school*, Proceedings International MPTL-7, <http://informando.infm.it/MPTL/>, 2002.
- A. STEFANEL, M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, *Mecaniche quantistiche te scuole secondary - Quantum Physics si secondary school*, Friulan journal of sciences – reserches, 3, p. 9-19, 2003.

SULLA FORMAZIONE INSEGNANTI

- M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, A. STEFANEL, *Experimenting a MIF on Quantum Physics for pre-service Teacher Training*, in selected paper of the Second INTERNATIONAL GIREP Seminar on Quality Development in Teacher Education and Training, Udine 1 - 6 September 2003.
- A. STEFANEL, M. MICHELINI, R. RAGAZZON, L. SANTI, *Proposal for quantum physics learning in secondary school*, selcted paper of the VIII Inter-American Conference on Physics Education, Teaching Physics for the Future, C-11, SCdF, Havana, Cuba, 2003.

Pag. 3	PRESENTAZIONE
Pag. 7	AVVICINARSI ALLA TEORIA DELLA MECCANICA QUANTISTICA PARTE I INDICAZIONI GENERALI
Pag. 11	PARTE II IL FILO E I SUOI CONTENUTI
Pag 28	VERSO IL FORMALISMO
Pag 33	STATI FISICI, AMPIEZZE E VETTORI
Pag 36	OPERATORI LINEARI
Pag 36	PARTE III DAL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE AI CAMMINI DI FEYNMAN
Pag 40	PARTE IV ESPERIMENTI
Pag 41	LE CARATTERISTICHE DELLA LUCE POLARIZZATA
Pag 45	LA LEGGE DI MALUS
Pag 49	TRASMITTIVITÀ DI UN POLAROID
Pag 52	INTERAZIONE DI LUCE POLARIZZATA CON UN CRISTALLO BIRIFRANGENTE
Pag 57	BIBLIOGRAFIA