

Opere generali, Dizionari

Agostinelli Istituzioni di fisica matematica
Amaldi, Bizzarri, Pizzella Fisica generale.
Elettromagnetismo Relatività Ottica
Burns, MacDonald Fisica per studenti di biologia
e medicina
Calder La chiave dell'universo - Rapporto sulla
nuova fisica
Fazio Dizionario e manuale delle unità di misura
La Fisica di Berkeley: 1. Meccanica - 2. Eletticità
e magnetismo - 3. Onde e oscillazioni - 4. Fisica
quantistica - 5. Fisica statistica. Laboratorio
Fleury, Mathieu Trattato di fisica generale e
sperimentale 1. Meccanica fisica - 2. Calore
Termodinamica Stati della materia - 4. Immagini
ottiche - 5. La luce: emissione, assorbimento,
propagazione - 6. Elettrostatica Corrente
continua Magnetismo - 7. Correnti variabili Onde
elettromagnetiche
Franchetti, Ranfagni, Mugnai Elementi di
struttura della materia
Frautschi, Olenick, Apostol, Goodstein L'universo
meccanico
Hurley, Garrod Principi di fisica
McGraw-Hill Zanichelli Dizionario enciclopedico
scientifico e tecnico inglese-italiano
italiano-inglese
Marion La fisica e l'universo fisico
Olenick, Apostol, Goodstein Oltre l'universo
meccanico. Dall'eletticità alla fisica moderna
Orear Fisica generale
Orear Fisica generale secondo il metodo
dell'istruzione programmata
Roller, Blum Fisica I: Meccanica, Onde e
Termodinamica
Roller, Blum Fisica II: Eletticità Magnetismo
Ottica
Sakurai Meccanica quantistica moderna
Severi Introduzione alla sperimentazione fisica
Sommerfeld Lezioni di fisica teorica I:
Meccanica
Taylor Introduzione all'analisi degli errori
Tipler Fisica (2ª edizione) (2 volumi)

Meccanica, Relatività, Teoria dei quanti

Gamow Trent'anni che sconvolsero la fisica - La
storia della teoria dei quanti (BMS)
Levi-Civita Fondamenti di meccanica relativistica
Matthews Introduzione alla meccanica
quantistica
Slater Teoria quantistica della materia

Calore, Termodinamica

Bordoni Fondamenti di fisica tecnica
Zemansky Calore e termodinamica
Zemansky, Abbott, Van Ness Fondamenti di
termodinamica per ingegneri

Eletticità, Magnetismo

Bekkefi, Barrett Vibrazioni elettromagnetiche,
onde e oscillazioni
Toraldo di Francia, Piero Bruscaioni Onde
elettromagnetiche (2ª edizione)

Struttura della materia

Caglioti Introduzione alla fisica dei materiali
Fermi Molecole e cristalli
Morpurgo Introduzione alla fisica delle particelle
Segrè Nuclei e particelle (2ª edizione)

Meccanica razionale, Fisica matematica

Agostinelli, Pignedoli Meccanica razionale
Cercignani Spazio, tempo, movimento.
Introduzione alla meccanica razionale
Fabrizio La meccanica razionale e i suoi metodi
matematici
Finzi Meccanica razionale
Goldstein Meccanica classica
Levi-Civita Caratteristiche dei sistemi
differenziali e propagazione ondosa
Levi-Civita, Amaldi Compendio di meccanica
razionale (2 volumi)
Levi-Civita, Amaldi Lezioni di meccanica
razionale (3 volumi)

Astrofisica, Astronomia

Bondi Sguardi sull'universo (BMS)
Briggs, Taylor Atlante Cambridge dei pianeti
Castellani Astrofisica stellare
Gardner L'universo ambidestro
Gratton Cosmologia. La visione scientifica del
mondo attraverso i secoli
Gratton Introduzione all'astrofisica. Stelle e
galassie (2 volumi)
Lucchin Introduzione alla cosmologia
Shipman L'universo inquieto. Introduzione
all'astronomia
Zagar Astronomia sferica e teorica

CF/Collana di Fisica

Castelnuovo Spazio e tempo secondo le vedute
di A. Einstein
Calder L'universo di Einstein
Shipman Buchi neri, quasar e universo
Calder Arriva la cometa. La nostra influente
eredità di Mr. Halley

Le Ellissi

Asimov Breve storia della fisica nucleare
Braccesi Esplorando l'universo
Feynman Sta scherzando, Mr. Feynman!
Feynman Che t'importa di ciò che dice la gente?
Islam Il destino ultimo dell'universo
Rossi Momenti nella vita di uno scienziato
Segrè Enrico Fermi, fisico. Una biografia
scientifica (2ª edizione)
Sexl Ciò che tiene insieme il mondo. La fisica
alla ricerca del progetto della natura

NCS/Nuovi Classici della Scienza

Atkins Il secondo principio
Morrison, Eames Potenze di dieci
Pierce La scienza del suono
Schwinger L'eredità di Einstein
Weinberg La scoperta delle particelle
subatomiche

Altri volumi

Bassani, Foà, Pegoraro Problemi di fisica della
Scuola Normale (Prospettive Didattiche)
Jones Le invenzioni di Dedalo
Walker Il luna park della fisica - 619 domande
e problemi insoliti per scoprire le basi, e le
frontiere, della fisica

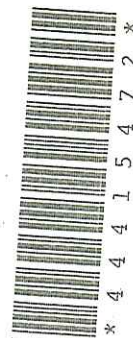
Collana di Strumenti Didattici Zanichelli/IBM

Bernardi, Galli, Ratti Fisica 1ª Meccanica e
Termodinamica - 2ª Eletticità (disponibile anche
edizione con minidisco)

JUN JOHN SAKURAI

MECCANICA QUANTISTICA MODERNA

a cura di
SAN FU TUAN



ZANICHELLI

Titolo originale: *Modern Quantum Mechanics*
Copyright © 1985 by The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

Traduzione italiana: Francesco Cannata, Giorgio Turchetti
Copertina: Duilio Leonardi
Copyright © 1990 Nicola Zanichelli Editore S.p.A., Bologna

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi
mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono
riservati per tutti i Paesi.

Prima edizione: febbraio 1990

Ristampe
5 4 3 2 1 1994 1993 1992 1991 1990

Il testo è stato composto dai traduttori utilizzando il sistema TEX.

In copertina: simulazione al computer di una collisione
protone-protone ad alta energia (Foto CERN COURIER).

Stampato a Bologna dalla
Tipostampa Bolognese - Via Collamarini, 5/A
per conto della
Nicola Zanichelli Editore S.p.A.
Via Irnerio, 34 - 40126 Bologna

Presentazione

J.J. Sakurai era sempre un ospite molto gradito al CERN (Comitato Europeo di Ricerche Nucleari), perché era uno dei pochi teorici ad interessarsi ai dati sperimentali ancor più che al gioco teorico stesso. Cionondimeno era appassionato di fisica teorica e del suo insegnamento, argomento sul quale aveva opinioni molto valide. Egli pensava che la maggior parte dell'insegnamento della fisica teorica fosse troppo restrittiva e distaccata dalle applicazioni pratiche: «...vediamo numerosi teorici specializzati, ma non acculturati, che sono a conoscenza del formalismo LSZ degli operatori di campo di Heisenberg, ma non sanno perché un atomo, eccitato, emana radiazioni, oppure non conoscono la derivazione quantomeccanica della legge di Rayleigh che spiega perché il cielo è azzurro». Ripeteva spesso che lo studente deve essere capace di mettere in pratica l'insegnamento ricevuto: «il lettore, che dopo aver letto un libro non sappia eseguire gli esercizi, non ha imparato nulla».

Mise in pratica questi principi nel libro *Advanced Quantum Mechanics* (1967) e in *Invariance Principles and Elementary Particles* (1964), entrambi consultati spesso nella biblioteca del CERN. Questo nuovo libro, *Meccanica Quantistica Moderna*, dovrebbe essere adoperato anche più spesso da un numero di fisici maggiore e meno specializzato. È un'opera di ampio respiro ed allo stesso tempo di assoluta praticità. I suoi lettori vi troveranno quello che hanno bisogno di sapere e potranno apprezzare il notevole sforzo, certamente riuscito, per renderlo comprensibile.

Per l'improvvisa morte di J.J. Sakurai, il 1° novembre 1982, questo libro è rimasto incompiuto. Assieme a Reinhold Bertlmann ho aiutato la signora Sakurai a classificare il materiale lasciato dal marito al CERN e tra questo abbiamo trovato una prima stesura manoscritta del libro ed un grande numero di esercizi. Anche se erano stati completati soltanto tre capitoli, era chiaro che la maggior parte dell'opera era stata ormai concepita. Restava tuttavia ancora molto lavoro da compiere: colmare le lacune, affinare la forma e riorganizzare il contenuto.

Il libro è stato ultimato grazie alla determinazione di Noriko Sakurai e alla dedizione di San Fu Tuan. In seguito alla morte del marito, la signora Sakurai ha deciso senza esitazione che la sua ultima fatica non andasse perduta e con grande coraggio e dedizione è divenuta l'elemento trainante di questo progetto, superando tutti gli ostacoli e stabilendo di raggiungere ambiziosi obiettivi. Anche San Fu Tuan ha voluto dedicare tempo ed energia al completamento e alla pubblicazione dell'opera di Sakurai. Forse soltanto persone vicine al frenetico campo della fisica teorica delle alte energie possono apprezzare in pieno il sacrificio affrontato.

Per me personalmente J.J. è stato per lungo tempo molto più di un semplice illustre collega. Mi addolora pensare che non potremo più scherzare insieme sulla fisica, sui fisici e sulla vita in genere e che egli non potrà constatare il successo della sua ultima opera. Tuttavia sono contento che questa sia stata portata a termine.

John S. Bell
CERN, Ginevra

Prefazione

J.J. Sakurai, alla sua prematura scomparsa nel novembre del 1982, ha lasciato un manoscritto incompiuto, riguardante la meccanica quantistica, che si basava su un corso che aveva tenuto spesso all'UCLA (University of California, Los Angeles). Per quanto esistano numerosi ottimi testi di meccanica quantistica, Sakurai pensava che in essi non venivano messi in piena evidenza gli sviluppi più recenti. I principali obiettivi che si proponeva nello scrivere questo libro, come nel suo insegnamento, erano la chiarezza dell'esposizione, la nitida messa a punto dei concetti chiave ed una maggiore attenzione ai più importanti recenti sviluppi raggiunti dagli studi di questa scienza sia a livello sperimentale sia a livello teorico (per esempio, gli esperimenti di interferometria neutronica, gli integrali di cammino di Feynman, le misure di correlazione e la diseguaglianza di Bell).

Questi obiettivi sono stati ampiamente raggiunti in quella parte del manoscritto che Sakurai aveva ultimato prima della sua morte. La stesura preliminare del resto del libro e gli appunti curati meticolosamente da Sakurai stesso costituiscono la base del mio lavoro di curatore, nel quale ho cercato di incorporare il più possibile del lavoro originario dello scienziato. Questo compito mi affascinava e mi intimoriva allo stesso tempo, specialmente per l'altissimo livello dei primi tre capitoli portati a termine, ma confido di essere riuscito a rendere il quadro d'insieme che l'autore aveva in mente, preservando la maggior parte del testo originale e il suo modo di affrontare i problemi.

Quest'opera è destinata a studenti che abbiano già studiato meccanica quantistica, non certo a dei principianti. Si presume che il lettore abbia una certa esperienza nella risoluzione delle equazioni d'onda dipendenti o indipendenti dal tempo, sia a conoscenza dell'evoluzione temporale libera del pacchetto gaussiano, abbia la capacità di risolvere problemi di trasmissione e riflessione nel caso unidimensionale e abbia le basi di alcune delle proprietà generiche delle autofunzioni e degli autovalori di Hamilton.

Il libro utilizza un approccio diretto ai sistemi quantistici e fornisce un'introduzione al formalismo quantistico. I soliti argomenti basilari sono discussi minuziosamente all'interno della meccanica quantistica come lo sono gli sviluppi più recenti, per esempio: la dinamica quantistica, l'approssimazione JWKB, il formalismo degli integrali di cammino, il potenziale vettore, i principi di simmetria, i metodi di approssimazione, il principio di Pauli, i diagrammi di Young e la teoria dello scattering. Nell'appendice A viene fornito un breve elenco di soluzioni elementari all'equazioni dell'onda di Schrödinger; in fondo al volume vi è una bibliografia di testi elementari di meccanica quantistica. Nell'opera vengono proposti degli esercizi che rappresentano una parte vitale del libro. Nella meccanica quantistica, come in tutte le altre discipline, è l'applicazione della teoria nella pratica a costituire la verifica dell'apprendimento.

Ringraziamenti

Per quanto non sia possibile ringraziare tutti coloro che hanno collaborato, desidero esprimere la mia gratitudine per il lavoro di molti di essi. Il Dott. John S. Bell del CERN ha corretto le bozze del capitolo 3, ricontrollando, in seguito, tutta la prima stesura completa del capitolo 7 per elimi-

nare eventuali errori. Il Dott. Thomas Fulton della John Hopkins University oltre a fornire un contributo con le proprie annotazioni sulla diffusione coulombiana nel paragrafo 13 del capitolo 7 (l'unico argomento che Sakurai desiderava aggiungere, ma del quale non esisteva neanche un manoscritto preliminare prima della sua morte), ha anche corretto attentamente le bozze del capitolo 3 ed ha soprattutto fornito la dimostrazione della regola di addizione del momento angolare (vedere l'Appendice B). I restanti capitoli sono stati attentamente controllati dal Dott. Dieter Schildknecht, della University of Bielefeld (capitolo 1), dal Dott. Reinhold Bertlmann dell'Institut für Theoretische Physik der Universität Wien (capitolo 2), dal Dott. Sandip Pakvasa della University of Hawaii (capitoli 4 e 6), dal Dott. Gordon Shaw della University of California, Irvine (capitolo 5), infine dal Dott. Steven Frautschi del California Institute of Technology (capitolo 7). Poiché il capitolo 5 richiedeva maggiore attenzione degli altri, anche il Dott. Shaw si è impegnato ad includere un'ulteriore applicazione dei metodi di approssimazione alle forze di van der Waals. I miei ex studenti Brent Hermsmeier, He Zhong Xiang, Daniel Weeks e Will Wilson mi hanno aiutato ad eliminare gli errori di stampa e a risolvere alcuni dei problemi, mentre seguivano il mio corso di meccanica quantistica alla University of Hawaii, nella primavera del 1984. Infine il Dott. Pisin Chen e il Dott. P.Q. Hung, già studenti di Sakurai, sono stati utili alla ricerca delle soluzioni mancanti e le hanno fornite addirittura dove un'attenta ricerca negli archivi del Professore aveva fallito. Per questo sono stati d'aiuto anche Nigel Wright e Minh Tran.

Il Department of Physics and Astronomy e l'High Energy Physics Group della University of Hawaii a Manoa hanno messo a disposizione le attrezzature e l'atmosfera favorevole alla definizione del lavoro del curatore. Sono particolarmente grato al direttore del dipartimento David E. Yount per il suo sostegno morale e all'ex segretaria del Professor Sakurai, la signora Gilda Reyes dell'UCLA, che ha battuto a macchina con molta precisione una prima stesura completa. A tutti coloro che ho citato finora vanno i miei più sentiti ringraziamenti e il riconoscimento del loro lavoro.

A nome di J.J. Sakurai i ringraziamenti sono estesi anche all'UCLA Physics Department, alla Alexander von Humboldt Foundation (per il Senior U.S. Scientist Award), al Max-Planck Institut für Physik und Astrophysik e al CERN (per la loro ospitalità), ai Professori Leo Stodolsky e Roberto Peccei del Max-Planck Institut e al Professor Maurice Jacob del Cern.

Per concludere desidero esprimere la mia gratitudine a Noriko Sakurai per il suo incoraggiamento ed aiuto e al redattore Richard Mixter oltre che al coordinatore di produzione Kristina Montague per la costanza e l'incrollabile ottimismo.

San Fu Tuan

1 gennaio 1985, Honolulu, Hawaii



J. J. Sakurai 1933–1982

In Memoriam

Jun John Sakurai, nato nel 1933 a Tokyo, si trasferì negli Stati Uniti nel 1949, mentre frequentava la scuola media superiore. Studiò ad Harvard e a Cornell e conseguì il Ph.D nel 1958. In seguito divenne assistente alla cattedra di fisica alla University of Chicago dove ottenne la cattedra nel 1964. Visse a Chicago fino al 1970, poi si stabilì a Los Angeles alla University of California, dove rimase fino alla morte. Durante la sua vita scrisse 119 articoli di fisica teorica delle particelle elementari, oltre a numerose opere e monografie sulla meccanica quantistica e sulla teoria delle particelle elementari.

La fisica teorica ha come scopo principale la formulazione di descrizioni teoriche del mondo fisico che siano allo stesso tempo concise ed esaurienti. Poiché la natura è sensibile e complessa, la ricerca nella fisica teorica richiede coraggio ed entusiasmo di fronte a fenomeni scoperti da poco. Si tratta di un campo in cui Sakurai eccelleva con il suo fenomenale intuito fisico ed introspettivo e anche con la sua abilità a spiegare questi fenomeni ai non specialisti in termini fisici molto accessibili. È sufficiente soltanto leggere i testi *Invariance Principles and Elementary Particles* e *Advanced Quantum Mechanics* esattamente come i suoi articoli e le sue lezioni nelle scuole estive, per rendersene conto. Senza esagerare potrei affermare che molto di quello che ho appreso nel campo delle particelle proviene proprio dai suoi articoli e dal suo insegnamento.

Quando Sakurai era ancora uno studente di dottorato, propose quella che adesso è conosciuta come la teoria V-A delle interazioni deboli, indipendentemente (ma contemporaneamente) da Richard Feynman, Murray Gell-Mann, Robert Marshak e George Sudarshan. Nel 1960 pubblicò negli *Annals of Physics* un lavoro profetico, probabilmente la sua monografia più importante. Riguardava il primo serio tentativo di costruire una teoria delle interazioni forti basata sull'invarianza di gauge abeliana e non abeliana (Yang-Mills). Questo lavoro ha stimolato i teorici a cercare di capire il meccanismo di generazione di massa per i campi di gauge vettoriali, attualmente realizzato tramite il meccanismo di Higgs, ma soprattutto ha incentivato la ricerca di unificazione realista delle forze tramite il principio di gauge, ora coronato da successo con la celebre unificazione di Glashow-Weinberg-Salam delle forze deboli ed elettromagnetiche. A livello fenomenologico, Sakurai ha perseguito e difeso vigorosamente il modello della dominanza dei mesoni vettori per la dinamica degli adroni. È stato il primo a discutere il mixing degli stati mesonici ω e ϕ e ha dato anche numerosi ed importanti contributi alla fenomenologia delle particelle elementari in senso più ampio, perché il suo cuore era sempre vicino alle attività sperimentali.

Conoscevo Jun John da più di 25 anni ed ho sempre avuto la più grande ammirazione non solo per il suo immenso valore come fisico teorico, ma anche per il calore e per la generosità del suo spirito. Anche se impegnato con il dottorato a Cornell, nel 1957/58, sacrificò parte del tempo destinato alla ricerca pionieristica sulle relazioni di dispersione per il K-nucleone, per aiutarmi nella mia tesi di dottorato a Berkeley sullo stesso argomento, attraverso uno scambio intenso di lettere. Assieme a Sandip Pakvasa ho avuto il privilegio di essere coinvolto in uno dei suoi ultimi lavori sugli accoppiamenti deboli dei quark pesanti, in cui mostrava ancora una volta il suo

modo, lucido e intuitivo, di affrontare la fisica. Naturalmente è stato gratificante per noi che Jun John classificasse questo lavoro tra quelli che ricordava con particolare piacere.

La comunità dei fisici ha subito una grave perdita con la morte di Jun John Sakurai e per me personalmente la perdita è stata particolarmente dolorosa. È per questo che ho molto gradito l'opportunità che ho avuto di completare e curare il suo manoscritto sulla *Meccanica Quantistica Moderna* e di poterlo pubblicare. Non avrei potuto ricevere regalo migliore della possibilità di dimostrare la mia devozione per Jun John attraverso questo lavoro.

San Fu Tuan

Indice

Presentazione	ii
Prefazione	iii
In Memoriam	v

1. Concetti Fondamentali	1
1.1. L'esperimento di Stern-Gerlach	2
1.2. Ket, Bra, e Operatori	10
1.3. Ket di Base e rappresentazione matriciale	17
1.4. Misure, Osservabili, e relazioni di indeterminazione	23
1.5. Cambiamento di base	36
1.6. Posizione, impulso, e traslazione	40
1.7. Funzione d'onda nello spazio delle coordinate e nello spazio degli impulsi	51
Problemi	59
2. Dinamica Quantistica	67
2.1. Evoluzione temporale ed equazione di Schrödinger	67
2.2. Rappresentazioni di Schrödinger e di Heisenberg	79
2.3. Oscillatore Armonico unidimensionale	88
2.4. Equazione d'onda di Schrödinger	96
2.5. Propagatore e integrali di cammino di Feynman	108
2.6. Potenziali e trasformazioni di gauge	121
Problemi	140
3. Teoria del Momento Angolare	148
3.1. Rotazioni e relazioni di commutazione del momento angolare	148
3.2. Sistemi di spin $\frac{1}{2}$ e rotazioni finite	154
3.3. $O(3)$, $SU(2)$ e rotazioni di Eulero	165
3.4. Operatori densità, insiemi puri e miscele	171
3.5. Autovalori e autostati del momento angolare	183
3.6. Momento angolare orbitale	192
3.7. Composizione di momenti angolari	200
3.8. Modello di oscillatore di Schwinger per il momento angolare	214
3.9. Misure di correlazioni di spin e disuguaglianza di Bell	220
3.10. Operatori Tensoriali	228
Problemi	238
4. Simmetrie in Meccanica Quantistica	244
4.1. Simmetrie, leggi di conservazione e degenerazioni	244
4.2. Simmetrie discrete, Parità, e inversione spaziale	247
4.3. Traslazioni di un reticolo come simmetria discreta	257
4.4. La simmetria discreta di inversione temporale	262
Problemi	277

5. Metodi di Approssimazione	280
5.1. Teoria perturbativa indipendente dal tempo. Caso non degenerare	280
5.2. Teoria perturbativa indipendente dal tempo. Caso degenerare	293
5.3. Atomi idrogenoidi: Struttura fine ed effetto Zeeman	298
5.4. Metodi variazionali	307
5.5. Potenziali dipendenti dal tempo: La rappresentazione di interazione	311
5.6. Teoria perturbativa dipendente dal tempo	320
5.7. Applicazione alle interazioni con il campo classico di radiazione	330
5.8. Spostamento energetico e larghezza di decadimento	336
Problemi	240
6. Particelle Identiche	351
6.1. Simmetria permutazionale	351
6.2. Postulato di simmetrizzazione	355
6.3. Sistema di due elettroni	357
6.4. Atomo di Elio	360
6.5. Simmetria permutazionale e tavole di Young	364
Problemi	371
7. Teoria della Diffusione	373
7.1. L'equazione di Lippmann-Schwinger	373
7.2. L'approssimazione di Born	380
7.3. Il teorema ottico	384
7.4. Approssimazione dell'iconale	386
7.5. Caso libero: onde piane, onde sferiche	388
7.6. Metodo delle onde parziali	393
7.7. Diffusione di bassa energia e stati legati	405
7.8. Diffusione risonante	412
7.9. Diffusione di particelle identiche	415
7.10. Considerazioni di simmetria nella diffusione	416
7.11. Formulazione dipendente dal tempo della diffusione	418
7.12. Diffusione inelastica elettrone-atomo	423
7.13. Diffusione coulombiana	428
Problemi	439
Appendice A	444
Appendice B	455
Bibliografia	457
Indice analitico	460

CAPITOLO 1

Concetti Fondamentali

Il cambiamento rivoluzionario nella comprensione dei fenomeni microscopici che ha avuto luogo durante i primi 27 anni del ventesimo secolo è senza precedenti nella storia delle scienze naturali. Siamo stati non solo testimoni delle forti limitazioni della fisica classica, ma abbiamo anche trovato che la teoria alternativa alle teorie fisiche classiche risulta assai più ricca, in quanto a portata e a dominio di applicabilità.

Il modo più tradizionale per cominciare a studiare la meccanica quantistica è di seguire i suoi sviluppi storici — la legge della radiazione di Planck, la teoria di Einstein-Debye dei calori specifici, l'atomo di Bohr, le onde di materia di de Broglie, e così via — insieme ad una attenta analisi di alcuni esperimenti cruciali come l'effetto Compton, l'esperimento di Franck-Hertz e l'esperimento di Davisson-Germer-Thompson. In questo modo possiamo arrivare ad apprezzare come i fisici nel primo quarto del ventesimo secolo siano stati obbligati ad abbandonare poco a poco i cari concetti della fisica classica e come, nonostante le false partenze iniziali e le svolte sbagliate, i grandi maestri — tra questi Heisenberg, Schrödinger e Dirac — siano finalmente riusciti a formulare la meccanica quantistica come la conosciamo oggi.

Tuttavia in questo libro non seguiamo il metodo storico ma iniziamo con un esempio che illustra, in modo fondamentale, forse meglio di ogni altro esempio, la inadeguatezza dei concetti classici. Speriamo che esponendo subito il lettore ad una "terapia d'urto", questo possa sintonizzarsi fin dallo stadio iniziale su quello che potremmo chiamare "un modo di pensare quanto-meccanico".

1.1. L'ESPERIMENTO DI STERN-GERLACH

L'esempio su cui ci concentriamo in questo paragrafo è l'esperimento di Stern-Gerlach concepito originariamente da O. Stern nel 1921 e realizzato da lui a Francoforte in collaborazione con W. Gerlach nel 1922. L'esperimento illustra in modo drammatico la necessità di un allontanamento radicale dai concetti della meccanica classica. Nelle sezioni successive si presenta il formalismo basilare della meccanica quantistica in maniera alquanto assiomatica ma sempre avendo presente l'esempio dell'esperimento di Stern-Gerlach. In un certo senso un sistema a due stati del tipo di Stern-Gerlach è il sistema meno classico e più quanto-meccanico. Una comprensione sicura dei problemi riguardanti i sistemi a due stati finirà col ripagare ogni serio studente di meccanica quantistica. Per questa ragione ci riferiremo ripetutamente al problema a due stati in tutto il libro.

Descrizione dell'esperimento

Presentiamo una breve descrizione dell'esperimento di Stern-Gerlach, discusso in quasi tutti i testi di fisica moderna.* Dapprima atomi di argento (Ag) sono riscaldati in un forno. Il forno ha una piccola apertura attraverso la quale alcuni atomi possono sfuggire. Come mostra la figura 1.1 il fascio passa attraverso un collimatore ed è soggetto ad un campo magnetico prodotto da due poli uno dei quali è sagomato ad angolo molto acuto.

Dobbiamo determinare l'effetto del campo magnetico sugli atomi di argento. A tal fine il seguente modello semplificato di atomi di argento è sufficiente. L'atomo di argento è costituito da un nucleo e 47 elettroni dei quali 46 possono essere visualizzati come una nube elettronica simmetrica priva di momento angolare complessivo. Se ignoriamo lo spin nucleare, che è irrilevante per la nostra discussione, vediamo che l'atomo nel suo insieme ha un momento angolare dovuto unicamente al momento angolare di spin - ossia momento angolare intrinseco in contrapposizione a quello orbitale - del solo 47-esimo elettrone (5s). I 47 elettroni sono attaccati al nucleo che è $\sim 2 \times 10^5$ volte più pesante dell'elettrone; come conseguenza, l'atomo pesante nel suo insieme possiede un momento magnetico uguale al momento magnetico di spin del 47-esimo elettrone.

In altre parole il momento magnetico μ dell'atomo risulta proporzionale allo spin dell'elettrone S

$$\mu \propto S \quad (1.1.1)$$

dove l'esatto fattore di proporzionalità risulta essere $e/m_e c$ ($e < 0$ in questo libro) con una precisione dello 0,2%.

Poiché l'energia di interazione del momento magnetico con il campo magnetico è

* Per una discussione elementare ma chiarificatrice dell'esperimento di Stern-Gerlach si veda French e Taylor (1978, 432-38).

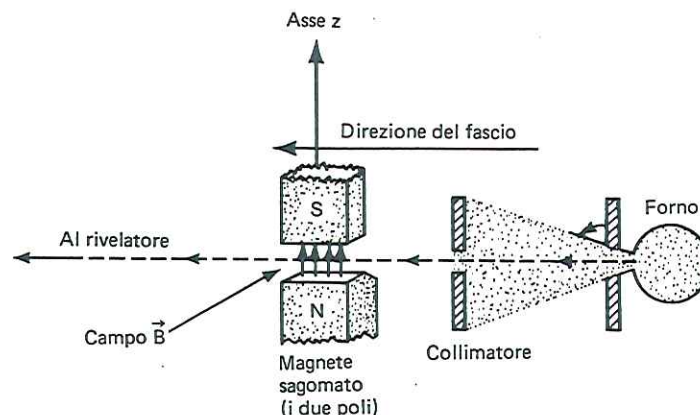


FIGURA 1.1. L'esperimento di Stern-Gerlach.

proprio $-\mu \cdot B$, la componente z della forza a cui l'atomo è soggetto è espressa da

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \cdot B) \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.1.2)$$

dove abbiamo ignorato le componenti di B in direzioni diverse dalla direzione z . Poiché l'atomo è molto pesante ci aspettiamo che il concetto classico di traiettoria possa essere correttamente usato, punto questo che può essere giustificato usando il principio di indeterminazione di Heisenberg che sarà derivato nel seguito. Con la disposizione indicata dalla figura 1.1, l'atomo con $\mu_z > 0$ ($S_z < 0$) è soggetto ad una forza dall'alto verso il basso, mentre l'atomo con $\mu_z < 0$ ($S_z > 0$) è soggetto ad una forza dal basso verso l'alto. Ci si aspetta allora che il fascio si suddivida a seconda dei valori di μ_z . In altre parole l'apparato di Stern-Gerlach SG "misura" la componente z di S a meno di un fattore di proporzionalità.

Gli atomi del forno sono orientati a caso; non c'è direzione preferenziale per l'orientazione di μ . Se l'elettrone fosse come un oggetto rotante classico, ci aspetteremmo che tutti valori di μ_z compresi tra $|\mu|$ e $-|\mu|$ fossero realizzati. Questo ci porterebbe ad aspettarci una distribuzione continua di fasci emergente dal dispositivo di SG, come mostra la figura 1.2a.

Invece quello che osserviamo sperimentalmente è più simile alla situazione della figura 1.2b. In altre parole, il dispositivo di SG suddivide il fascio originale d'argento proveniente dal forno in due *distinte* componenti, fenomeno cui, agli inizi della teoria dei quanti, ci si riferiva in termini di "quantizzazione spaziale". Nei limiti in cui μ può essere identificato con lo spin S dell'elettrone, a meno di un fattore di proporzionalità, si osserva che solo due valori della componente di S sono possibili, S_z su e S_z giù che indicheremo $S_z +$ e $S_z -$. I due possibili valori di S_z sono multipli di una unità fondamentale di momento angolare;

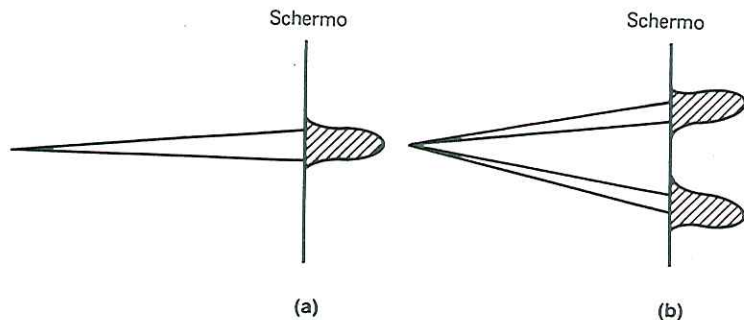


FIGURA 1.2. Fascio emergente da un dispositivo SG: (a) è la predizione della fisica classica, mentre (b) è quanto effettivamente si osserva.

numericamente risulta che $S_z = \hbar/2$ e $-\hbar/2$ dove

$$\begin{aligned}\hbar &= 1.0546 \times 10^{-27} \text{ erg-s} \\ &= 6.5822 \times 10^{-16} \text{ eV-s}\end{aligned}\quad (1.1.3)$$

Questa "quantizzazione" del momento angolare di spin dell'elettrone è il primo aspetto importante che deduciamo dall'esperimento di Stern e Gerlach.

Naturalmente non c'è nulla di sacro nella direzione sopra-sotto dell'asse z . Avremmo potuto applicare un campo inhomogeneo nella direzione orizzontale, diciamo nella direzione dell'asse x , con il fascio che avanza nella direzione y . In questo modo avremmo potuto separare il fascio proveniente dal forno nella componente S_{x+} e S_{x-} .

Esperimenti di Stern-Gerlach sequenziali

Consideriamo ora un esperimento di Stern-Gerlach sequenziale. Si fa passare il fascio attraverso due o più dispositivi SG in successione. La prima combinazione da considerare è relativamente semplice. Sottoponiamo il fascio proveniente dal forno all'azione di vari dispositivi secondo lo schema di figura 1.3a dove $SG\hat{z}$ sta per un dispositivo con il campo magnetico inhomogeneo nella direzione z come al solito. Quindi blocchiamo la componente S_{z-} proveniente dal primo dispositivo $SG\hat{z}$ e lasciamo che la restante componente S_{z+} sia sottoposta ad un altro dispositivo $SG\hat{z}$.

Questa volta una sola componente del fascio proviene dal secondo dispositivo, proprio la componente S_{z+} . Questo forse non è sorprendente; dopo tutto se gli spin degli atomi sono su, ci si può aspettare che restino tali, in mancanza di un qualsiasi campo esterno che ruoti gli spin tra il primo ed il secondo dispositivo $SG\hat{z}$.

Un po' più interessante è la combinazione mostrata nella figura 1.3b. Qui il primo dispositivo SG è lo stesso di prima, ma il secondo ($SG\hat{x}$) ha un campo magnetico inomo-

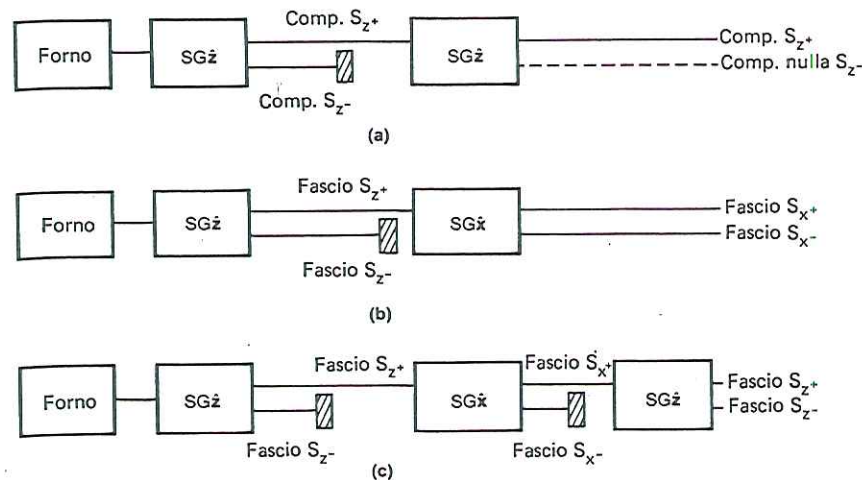


FIGURA 1.3. Esperimento di Stern-Gerlach sequenziale.

geneo nella direzione x . Il fascio S_{z+} che entra nel secondo dispositivo è ora suddiviso in due componenti, una componente S_{x+} ed una S_{x-} con uguali intensità. Come possiamo spiegare questo? Significa forse che il 50% degli atomi nel fascio S_{z+} provenienti dal primo dispositivo $SG\hat{z}$ sono fatti di atomi caratterizzati sia da S_{z+} sia da S_{x+} mentre il rimanente 50% ha entrambi S_{z+} e S_{x-} ? Si trova che questa descrizione incontra delle difficoltà come si mostrerà più avanti.

Consideriamo nella terza fase la combinazione mostrata in figura 1.3c, che illustra nel modo più clamoroso la peculiarità dei sistemi quantomeccanici. Questa volta aggiungiamo alla combinazione mostrata dalla figura 1.3b un terzo dispositivo del tipo $SG\hat{z}$. Si osserva sperimentalmente che due componenti emergono dal terzo dispositivo, non una; si vede che i fasci emergenti hanno entrambi una componente S_{z+} e una componente S_{z-} . Questa è una totale sorpresa perché dopo che gli atomi sono usciti dal primo dispositivo ci siamo assicurati che la componente S_{z-} fosse completamente bloccata. Com'è possibile che la componente S_{z-} , che pensavamo di aver completamente eliminato prima, ricompaia? Il modello secondo cui gli atomi che entrano nel terzo dispositivo si immagina abbiano entrambe le componenti S_{z+} e S_{x+} è chiaramente insoddisfacente. Questo esempio è spesso usato per illustrare il fatto che in meccanica quantistica non possiamo determinare simultaneamente S_z e S_x . Più precisamente possiamo dire che la selezione del fascio S_{x+} da parte del secondo dispositivo ($SG\hat{x}$) distrugge ogni precedente informazione su S_z .

È divertente paragonare questa situazione con quella di una trottola in meccanica classica, dove il momento angolare

$$L = I\omega \quad (1.1.4)$$

può essere misurato determinando le componenti del vettore velocità angolare ω . Osservando quanto velocemente l'oggetto ruota, e in quale direzione, possiamo determinare ω_x ,

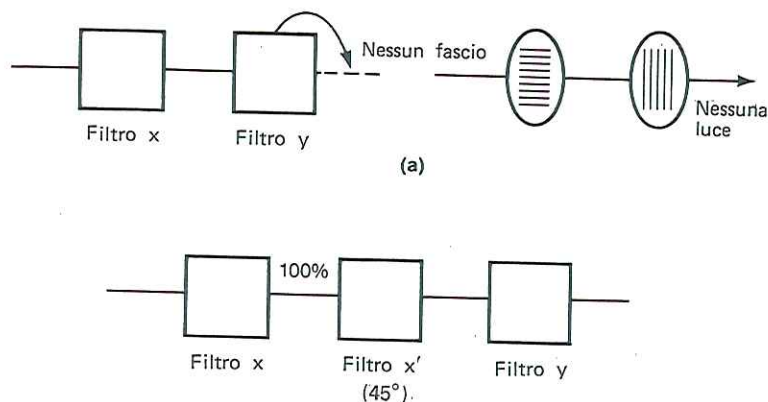


FIGURA 1.4. Fasci luminosi sottoposti all'azione di filtri Polaroid.

ω_y e ω_z contemporaneamente. Il momento di inerzia I è calcolabile se conosciamo la densità di massa e la forma della trottola e quindi non si ha nessuna difficoltà a specificare L_z e L_x in questa situazione classica.

Occorre capire bene che la limitazione che abbiamo trovato nel determinare S_z e S_x non è dovuta all'incompetenza dello sperimentatore. Migliorando le tecniche sperimentali non possiamo fare sparire la componente S_z — all'uscita dal terzo dispositivo nella figura 1.3c. Le peculiarità della meccanica quantistica sono imposte dall'esperimento stesso. Il limite è infatti inerente ai fenomeni microscopici.

Analogia con la polarizzazione della luce

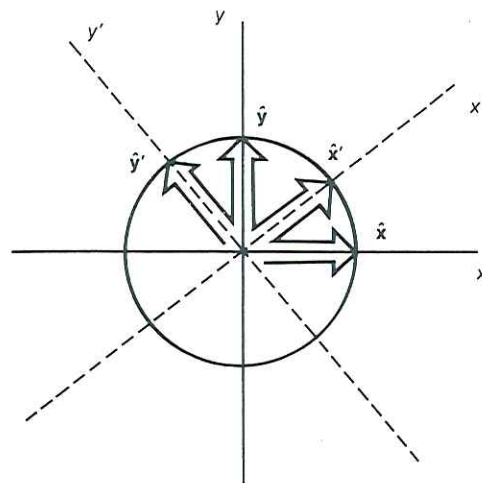
Poiché questa situazione sembra insolita qualche analogia con una situazione classica che ci è familiare può risultare utile a questo punto. A questo scopo faremo una digressione sulla polarizzazione delle onde luminose.

Si consideri la propagazione di un'onda luminosa polarizzata che si propaga nella direzione z . La luce polarizzata linearmente (o polarizzata in un piano) con vettore di polarizzazione nella direzione x , che per brevità chiameremo x -polarizzata, ha un campo con dipendenza spazio-temporale che oscilla nella direzione x

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) \quad (1.1.5)$$

In modo simile possiamo considerare una luce y -polarizzata che si propaga nella direzione dell'asse z

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \quad (1.1.6)$$

FIGURA 1.5. Orientazione degli assi x' e y' .

I fasci di luce polarizzata del tipo (1.1.5) oppure (1.1.6) possono essere ottenuti facendo passare un fascio di luce non polarizzata attraverso un filtro Polaroid. Chiameremo x -filtro un filtro che seleziona solo fasci polarizzati nella direzione x . Un x -filtro diventa naturalmente un y -filtro quando viene ruotato di 90° attorno alla direzione (z). È ben noto che quando lasciamo che un fascio di luce attraversi un x -filtro e successivamente lo lasciamo incidere su un y -filtro, nessun fascio luminoso ne esce a patto, naturalmente, che si abbia a che fare con Polaroid efficienti al 100%; si veda la figura 1.4a.

La situazione è anche più interessante se inseriamo tra l' x -filtro e l' y -filtro ancora un altro Polaroid che seleziona solo un fascio polarizzato nella direzione, che chiamiamo direzione x' , e che forma un angolo di 45° con la direzione dell'asse x nel piano xy ; vedi figura 1.4b. Questa volta un fascio di luce esce fuori dall' y -filtro nonostante, subito dopo essere uscito dall' x -filtro, non avesse alcuna componente di polarizzazione nella direzione y . In altre parole una volta che interviene l' x' -filtro e seleziona il fascio polarizzato lungo x' , è irrilevante il fatto che il fascio fosse prima polarizzato lungo x .

La selezione da parte del secondo Polaroid del fascio polarizzato lungo x' annulla ogni precedente informazione sulla polarizzazione della luce. Si noti che questa situazione è del tutto simile alla situazione che abbiamo precedentemente incontrato con il dispositivo SG della figura 1.3b, purché si stabilisca la seguente corrispondenza:

$$\begin{aligned} \text{atomi } S_z \pm &\leftrightarrow \text{luce polarizzata lungo } x, y \\ \text{atomi } S_{x'} \pm &\leftrightarrow \text{luce polarizzata lungo } x', y' \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

dove gli assi x' e y' sono orientati come nella figura 1.5.

Esaminiamo come possiamo descrivere in modo quantitativo il comportamento di fasci di luce polarizzati a 45° (fasci polarizzati lungo x' e y') secondo lo schema della elettrodinamica classica. Usando la figura 1.5 otteniamo

$$\begin{aligned} E_0 \hat{x}' \cos(kz - \omega t) &= E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right], \\ E_0 \hat{y}' \cos(kz - \omega t) &= E_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Nella combinazione con il filtro triplo della figura 1.4.b il fascio che esce dal primo Polaroid è un fascio polarizzato lungo $\hat{x}$, che può esser visto come una combinazione lineare di un fascio polarizzato lungo x' e di un fascio polarizzato lungo y' . Il secondo Polaroid seleziona il fascio polarizzato lungo x' che può essere a sua volta considerato come una combinazione lineare di un fascio polarizzato lungo x e di uno polarizzato lungo y . Infine il terzo Polaroid seleziona la componente polarizzata lungo y .

L'uso della corrispondenza (1.1.7) tra l'esperimento di Stern-Gerlach sequenziale della figura 1.3c e l'esperimento del filtro triplo della figura 1.4b suggerisce che si potrebbe rappresentare lo stato di spin di un atomo di argento con una sorta di vettore in un nuovo spazio vettoriale bidimensionale, uno spazio vettoriale astratto da non confondersi con lo spazio bidimensionale ordinario (x, y) . Proprio come $\hat{x}$ e $\hat{y}$ in (1.1.8) costituiscono una base di vettori usata per decomporre il vettore di polarizzazione $\hat{x}'$ della luce polarizzata lungo x' è ragionevole rappresentare lo stato $S_x +$ con un vettore, che chiameremo un ket secondo la notazione di Dirac che sarà esaurientemente sviluppata nel prossimo paragrafo. Indicheremo questo vettore con $|S_x; +\rangle$ e lo scriveremo come una combinazione di due vettori di base $|S_z; +\rangle$ e $|S_z; -\rangle$ che corrispondono rispettivamente agli stati $S_z +$ e $S_z -$. Possiamo quindi fare la seguente congettura

$$|S_x; +\rangle \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle \quad (1.1.9a)$$

$$|S_x; -\rangle \stackrel{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle \quad (1.1.9b)$$

in analogia con (1.1.8). Nel seguito mostreremo come ottenere queste espressioni usando il formalismo generale della meccanica quantistica.

Così la componente non bloccata che esce dal secondo dispositivo (SG $\hat{x}$) della figura 1.3c deve essere considerata come una sovrapposizione di $S_z +$ e $S_z -$ nel senso di (1.1.9a). È per questa ragione che due componenti emergono dal terzo dispositivo (SG $\hat{z}$).

La domanda, che ci riguarda immediatamente, è: come possiamo rappresentare gli stati $S_y \pm$? Argomenti di simmetria suggeriscono che se osserviamo un fascio $S_z \pm$ che avanza nella direzione x e lo facciamo passare per un dispositivo SG $\hat{y}$, la situazione risultante è assai simile a quella in cui un fascio $S_z \pm$, che procede nella direzione y , attraversa un dispositivo SG $\hat{x}$. I ket per $S_y \pm$ dovrebbero essere allora visti come una combinazione lineare di $|S_z; \pm\rangle$, ma notiamo dalla (1.1.9) che abbiamo già esaurito le possibilità a nostra disposizione nello scrivere $|S_x; \pm\rangle$. Come può il nostro formalismo di spazio vettoriale distinguere gli stati $S_y \pm$ dagli stati $S_x \pm$?

Una analogia con la luce polarizzata ci salva di nuovo. Questa volta consideriamo un fascio di luce polarizzato circolarmente, che possiamo ottenere facendo passare luce polarizzata linearmente attraverso una lamina a quarto d'onda. Quando facciamo passare questa luce polarizzata circolarmente attraverso un x -filtro o un y -filtro otteniamo di nuovo un fascio di luce polarizzata lungo x o polarizzata lungo y di uguale intensità. Eppure si sa che la luce polarizzata circolarmente è completamente diversa da quella polarizzata linearmente a 45° (polarizzata lungo x' o polarizzata lungo y').

Come rappresentiamo matematicamente la luce polarizzata circolarmente? La luce polarizzata circolarmente a destra (o destrogira) non è altro che una combinazione lineare di luce polarizzata lungo x e di luce polarizzata lungo y dove l'oscillazione del campo elettrico per la componente polarizzata lungo y è sfasata di 90° rispetto alla componente polarizzata lungo x : *

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \right] \quad (1.1.10)$$

È più elegante usare la notazione complessa introducendo ϵ come segue

$$\text{Re}(\epsilon) = \mathbf{E}. \quad (1.1.11)$$

Per la luce polarizzata circolarmente possiamo scrivere

$$\epsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (1.1.12)$$

dove abbiamo usato $i = e^{i\pi/2}$.

Possiamo allora stabilire la seguente analogia con lo spin degli atomi d'argento:

$$\begin{aligned} \text{atomo } S_y + &\leftrightarrow \text{fascio destrogiro} \\ \text{atomo } S_y - &\leftrightarrow \text{fascio levogiro} \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Applicando questa analogia a (1.1.12) vediamo che, se è possibile rendere complessi i precedenti vettori ket di base, non si incontra alcuna difficoltà nell'inserire gli atomi $S_y \pm$ nel nostro formalismo di spazi vettoriali

$$|S_y; \pm\rangle \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle \quad (1.1.14)$$

espressione che è naturalmente diversa da (1.1.9). Vediamo così che lo spazio bidimensionale necessario per descrivere gli atomi d'argento deve essere uno spazio vettoriale complesso; un vettore arbitrario in questo spazio si scrive come combinazione lineare dei vettori di base $|S_z; \pm\rangle$ con coefficienti in generale complessi. È un fatto notevole che, da questo esempio elementare, risulti chiaramente la necessità di introdurre i numeri complessi.

* Sfortunatamente non c'è alcuna unanimità nella letteratura sulla definizione di luce levogira e destrogira.

Il lettore deve aver notato sin d'ora che abbiamo evitato deliberatamente di parlare di fotoni. In altre parole abbiamo completamente ignorato l'aspetto quantistico della luce; non abbiamo mai fatto riferimento agli stati di polarizzazione dei singoli fotoni. L'analogia che abbiamo sviluppato è tra i ket in uno spazio vettoriale astratto che descrivono gli stati di spin dei singoli atomi e i vettori di polarizzazione del *campo elettromagnetico classico*. Effettivamente avremmo potuto rendere l'analogia anche più stringente introducendo il concetto di fotone e parlando della probabilità di trovare un fotone polarizzato circolarmente in uno stato polarizzato linearmente e così via; tuttavia non se ne riscontra qui la necessità. Anche senza far questo abbiamo già raggiunto lo scopo principale di questo paragrafo che è di introdurre l'idea che gli stati dei sistemi quanto-meccanici debbono essere rappresentati da vettori in spazi vettoriali astratti complessi.*

1.2 KET, BRA E OPERATORI

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato come l'analisi dell'esperimento di Stern-Gerlach ci porti a considerare uno spazio vettoriale complesso. In questo paragrafo e nel successivo diamo la formulazione matematica di base degli spazi vettoriali come viene usata nella meccanica quantistica. La nostra notazione in tutto questo libro è quella dei bra e dei ket sviluppata da P. A. M. Dirac. La teoria degli spazi vettoriali lineari era, naturalmente, ben nota ai matematici prima della nascita della meccanica quantistica, ma il modo di Dirac di introdurre gli spazi vettoriali ha molti vantaggi, soprattutto dal punto di vista del fisico.

Spazio dei ket

Consideriamo uno spazio vettoriale complesso la cui dimensionalità è specificata dalla natura del sistema fisico in considerazione. Negli esperimenti del tipo di Stern-Gerlach dove il solo grado di libertà quanto meccanico è lo spin di un atomo la dimensione è determinata dal numero di traiettorie alternative che un atomo può seguire dopo esser passato attraverso un dispositivo SG; nel caso degli atomi di argento del precedente paragrafo la dimensione è due e corrisponde ai due possibili valori che S_z può assumere.† Nel para-

* Il lettore che è interessato a cogliere i concetti basilari della meccanica quantistica attraverso uno studio della polarizzazione del fotone può trovare il capitolo 1 di Baym (1969) estremamente illuminante.

† Per molti sistemi fisici la dimensione dello spazio degli stati è numerabilmente infinita. Mentre di solito ci riferiamo ad uno spazio di ket di dimensione finita, N , i risultati valgono anche per dimensioni infinite ma numerabili.

grafo 1.6 consideriamo il caso di spettri continui, per esempio la posizione (coordinata) o la quantità di moto di una particella, dove il numero di alternative è infinito ma non numerabile; in questo caso lo spazio vettoriale in questione è noto come *spazio di Hilbert* da D. Hilbert che ha studiato gli spazi vettoriali di dimensione infinita.

In meccanica quantistica uno stato fisico, per esempio un atomo di argento con una orientazione definita dello spin, è rappresentato da un vettore di stato in uno spazio vettoriale complesso. Seguendo Dirac chiamiamo questo vettore un ket e lo indichiamo con $|\alpha\rangle$. Si postula che questo ket di stato contenga tutte le informazioni sullo stato fisico; tutto quello che possiamo chiedere sullo stato è contenuto nel ket. Due ket possono essere sommati

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad (1.2.1)$$

La somma $|\gamma\rangle$ è un altro ket. Se moltiplichiamo $|\alpha\rangle$ per un numero complesso c , il prodotto risultante $c|\alpha\rangle$ è un altro ket. Il numero c può stare a destra o a sinistra del ket; non v'è alcuna differenza.

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \quad (1.2.2)$$

Nel caso particolare in cui c è zero, si dice che il ket risultante è un ket nullo.

Uno dei postulati è che $|\alpha\rangle$ e $c|\alpha\rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico. In altre parole solo la direzione nello spazio degli stati è significativa. I matematici preferiscono dire che stiamo trattando raggi piuttosto che vettori.

Una osservabile, come una componente della quantità di moto e dello spin, può essere rappresentata da un operatore A nello spazio in questione. In generale un operatore agisce su un ket da sinistra

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle \quad (1.2.3)$$

dando origine ad un altro vettore. Operazioni di moltiplicazione saranno discusse nel seguito.

In generale $A|\alpha\rangle$ non è il prodotto di una costante per $|\alpha\rangle$. Tuttavia ci sono dei ket particolarmente importanti noti come autoket dell'operatore A , che si indicano con

$$|a'\rangle, |a''\rangle, |a'''\rangle, \dots \quad (1.2.4)$$

con la proprietà

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle, A|a''\rangle = a''|a''\rangle \quad (1.2.5)$$

dove $a', a'', \dots$ sono semplicemente numeri. Si noti che l'applicazione di A ad un autoket riproduce lo stesso ket a parte un fattore moltiplicativo. L'insieme di numeri $\{a', a'', a''', \dots\}$, indicato in modo più compatto con $\{a'\}$, è chiamato l'insieme degli autovalori dell'operatore A . Quando diventa necessario ordinare gli autovalori in un modo specifico la notazione $\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots\}$ può essere usata al posto di $\{a', a'', a''', \dots\}$.

Lo stato fisico corrispondente ad un autoket è chiamato un autostato. Nel caso più semplice dei sistemi di spin $\frac{1}{2}$ la relazione (1.2.5) è espressa da

$$S_z|S_z; +\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_z; +\rangle, \quad S_z|S_z; -\rangle = -\frac{\hbar}{2}|S_z; -\rangle \quad (1.2.6)$$