11

THEORIA ATTRACTIONIS CORPORVM SPHAEROIDICORVM ELLIPTICORVM HOMOGENEORVM

METHODO NOVA TRACTATA

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS.

SOCIET. REG. SCIENT. TRADITA 18 MART. 1813.

I.

Satis quidem conſtat, problema de attractione corporis ſphaeroidici elliptici homogenei in punctum quoduis exacte determinanda ad quaeſtiones difficillimas aſtronomiae phyſicae referri, pluresque geometras, inde a Newtoni temporibus, acriter iteratisque vicibus illi incubuiſſe. Primo quidem, inueſtigatione ad ſphaeroidem per reuolutionem ſemiellipſis circa alterutrum axem ortam reſtricta, ipſe ſummus *Newton* attractionem quam patitur punctum in axi ſitum inuenire docuit, ſimulque nexum inter attractiones, quas patiuntur puncta intra ſphaeroidem in eadem diametro ſita, aſſignauit (*Princip. Lib. I. Prop. XCI.*). Dein ſagax *Mac Laurin*, ſyntheſi perelegante vſus, attractionem punctorum in ſphaeroidis ſuperficie vel in prolongatione plani aequatoris poſitorum determinauit, quo pacto ſimul theoria attractionis punctorum intra ſphaeroidem ſitorum, quae per Newtoni theorema ad attractionem punctorum in ſuperficie facile referebatur, complete abſoluta erat (De cauſſa phyſica fluxus et refluxus maris, in *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'acad. roi. des ſc.* T. IV; *Treatiſe of fluxions B.* I. *Ch.* 14). Quae Mac Laurin per ſyntheſin enucleauerat, poſtea per analyſin (cui antea huiusmodi quaeſtiones inacceſſibiles viſae erant) haud minus eleganter eruere docuit ill. *Lagrange*, atque ſic viam ad vlteriores progreſſus patefecit (*Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin* 1773). Scilicet adhuc deſiderabatur attractio punctorum extra ſphaeroidem neque vero in axis nec in aequatoris prolongatione ſitorum enodanda, quam difficillimam problematis partem abſoluere contigit ill. *Legendre* (*Recherches ſur l'attraction des ſphéroides homogènes*, *Memoires préſentés à l'acad. roi. des ſc.* T. X.)

Disquiſitionem generaliſſimam de attractione ſphaeroidum non per reuolutionem ortarum, ſed quarum ſectiones cum quolibet plano ſunt ellipſes, iamiam inchoauerat Mac Laurin, ſed ſubſtiterat in attractione punctorum in aliquo trium axium poſitorum. Theorema principale, cui ſolutio problematis generaliſſima praeſertim innititur, per inductionem quidem iam coniectauerat ill. Legendre in commentatione modo laudata, ſed ill. *Laplace* primo ſucceſſit, omnia rigoroſe demonſtrare atque ſic ſolutionem ab omni parte perfectam reddere (*Hiſt. de l'acad. roi. des ſc. de Paris* 1782; eadem ſolutio repetita in operibus *Theorie du mouvement et de la figure elliptique des planetes*, atque *Mecanique celeſte* Vol. 2.).

Elegantiam ingeniique ſubtilitatem in hac ill. Laplace ſolutione eminentem nemo quidem non mirabitur: nihilominus tamen ipſa ſubtilitas arsque admiranda, per quam arduas difficultates ſuperauit, geometris deſiderium liquit ſolutionis ſimplicioris, minus intricatae magisque directae. Nec plane ſatisfecit huic deſiderio ill. Legendre per nouam theorematis principalis demonſtrationem (*Hiſt.* *de* *de l'acad. roi. des ſc.* 1788, *Sur les intégrales doubles*), etiamſi exquiſita ars analytica omnium geometrarum ſuffragia merito tulerit *). Poſtea clar. *Biot* ſolutionem alteram, alteram clar. *Plana* ſimpliciorem reddere conati ſunt (*Mem. de l'inſtitut T. VI*, *Memorie di matematica e di fiſica della ſocietà italiana T. XV*): ſed ſic quoque vtramque ſolutionem ad intricatiſſimas analyſeos applicationes referendam eſſe, quisque facile concedet.

Gratam itaque analyſtis atque aſtronomis fore ſperamus ſolutionem nouam problematis celebratiſſimi per viam plane diuerſam procedentem, et ni fallimur ea ſimplicitate gaudentem, vt nihil amplius deſiderandum linquat.

Ipsa quidem ſolutio noſtra pauciſſimis pagellis continebitur. Operae tamen pretium eſſe cenſemus, antequam ad ipſum problema, cui haec commentatio dicata eſt, descendamus, quasdam disquiſitiones praeliminares, quae in aliis quoque occaſionibus opportune applicari poterunt, aliquanto generalius exſequi, fuſiusque explicare, quam inſtituti noſtri ratio per ſe ſpectata poſtularet.

2.

Conſiderabimus generaliſſime corpus finitum figurae cuiuscunque, a reliquo ſpatio infinito per ſuperficiem vnam continuam vel plures continuas interque ſe diſcretas ſeparatum (ſi forte corpus cauitatem vnam pluresue includat), quarum complexum ſimpliciter ſuperficiem corporis dicemus. Concipiatur haec ſuperficies in infinita elementa ds diuiſa; ſit P punctum elementi ds, cuius coordinatae ad tria plana inter ſe perpendicularia relatae denotentur per

x, y, z

*) De his duabus ſolutionibus e. g. ita iudicat ill. Lagrange: *On ne peut regarder leurs ſolutions que comme des chefs-d'oeuvres d'analyſe, mais on peut déſirer encore une ſolution plus directe et plus ſimple; et les progrès continuels de l'analyſe donnent lieu de l'espérer.* Nouv. Mem. de l'acad. de Berlin 1793. p. 263.

x, y, z. Sint PX, PY, PZ rectae axibus coordinatarum resp. parallelae, atque in plagas eas directae, verſus quas coordinatae incrementa poſitiua capere ſupponuntur, porro ſit PQ ſuperficiei normalis extrorſumque directa. Sit M punctum attractum vbicunque libet ſitum, ipſius coordinatae a, b, c, atque diſtantia PM (ſemper poſitiue accipienda) $= r$. Angulos quos facit recta PM cum PX, PY, PZ denotabimus per MX, MY, MZ, angulosque inter PQ atque PX, PY, PZ, PM per QX, QY, QZ, QM. Haec omnia ad puncta ſuperficiei indefinite referuntur: quoties de pluribus punctis ſuperficiei determinatis agendum erit, iisdem characteribus accentibus diſtinctis vtemur.

3.

Concipiatur planum axi coordinatarum x normale, ita tamen, vt ſi ipſius aequatio exhibeatur per $x = \alpha$, α ſit minor quam valor minimus coordinatae x in ſuperficie corporis. Corpus in hoc planum proiectum figuram finitam ibi deſignabit, quam in elementa infinita $d\Sigma$ diſpertitam ſupponemus. In elementi $d\Sigma$ puncto Π erigatur perpendiculum (ſiue axi coordinatarum x parallelum), quod ſecet corpus in punctis P', P'', P''' etc.: horum punctorum multitudo manifeſto erit par. Erigantur etiam perpendicula ad planum in ſingulis punctis circumferentiae elementi $d\Sigma$, quae formabunt ſuperficiem cylindricam ſenſu latiori, atque e ſuperficie corporis elementa ds', ds'', ds''' etc. reſcindent. Elementum $d\Sigma$ erit proiectio ſingulorum elementorum ds', ds'', ds''' etc., vnde patet eſſe $d\Sigma = \pm ds'. \cos QX' = \pm ds''. \cos QX'' = \pm ds'''. \cos QX'''$ etc., ſigno ſuperiori vel inferiori valente, prout coſinus anguli acuti vel obtuſi adeſt. Quoniam vero manifeſto perpendiculum in P' corpus ingreditur, in P'' e corpore exit, in P''' rurſus intrat etc., facile perſpicitur, QX' obtuſum eſſe, QX'' acutum, QX''' obtuſum etc., ita vt habeatur

$$d\Sigma = - ds'. \cos QX' = + ds''. \cos QX'' = - ds'''. \cos QX''' \text{ etc.}$$

adeoque

adeoque propter partium multitudinem parem

$$ds'.\cos QX' + ds''.\cos QX'' + ds'''.\cos QX''' + \text{etc.} = 0.$$

Tractando eodem modo omnia reliqua elementa $d\Sigma$, atque summando, nanciscimur

THEOREMA PRIMVM.

Integrale $\int ds.\cos QX$ per totam corporis superficiem extensum fit $= 0$.

Generalius eodem modo inuenitur, integrale

$$\int (T\cos QX + U\cos QY + V\cos QZ)\, ds$$

euanescere, si T, U, V resp. designent functiones rationales solarum y, z, solarum x, z, solarumque x, y.

4.

Quum volumina partium cylindri a plano nostro vsque ad puncta P', P'', P''' etc. resp. sint $= d\Sigma.(x'-\alpha)$, $d\Sigma.(x''-\alpha)$, $d\Sigma.(x'''-\alpha)$ etc., pars voluminis corporis ea, quae intra cylindrum sita est, erit

$$= -x'd\Sigma + x''d\Sigma - x'''d\Sigma + \text{etc.}$$
$$= ds'.x'\cos QX' + ds''.x''\cos QX'' + ds'''.x'''\cos QX''' + \text{etc.}$$

vnde summando pro omnibus $d\Sigma$ obtinemus

THEOREMA SECVNDVM.

Volumen integrum corporis exprimitur per integrale $\int ds.\, x\cos QX$ per totam superficiem extensum.

Manifesto idem volumen etiam per $\int ds.\, y\cos QY$ vel per $\int ds.\, z\cos QZ$ exprimere licebit.

5.

Concipiatur iam primo cylinder totus materia vniformiter densa repletus, videamusque quantam singula eius elementa attractionem in punctum M exerceant. Diuidatur cylinder per plana infinite

infinite fibi proxima bafique parallela in cylindros elementares, qualium vnus, ad punctum cuius coordinatae funt ξ, η, ζ, per $d\Sigma. d\xi$ exprimi poterit. Huius diftantia a puncto M erit

$$= \sqrt{((a-\xi)^2 + (b-\eta)^2 + (c-\zeta)^2)} = \varrho,$$

vnde ipfius attractio in punctum M exhiberi poterit per $d\Sigma. d\xi. f\varrho$, denotante functione $f\varrho$ legem attractionis. Quare quum per totum cylindrum fola ξ tamquam variabilis fpectanda fit, erit $\varrho d\varrho = -(a-\xi) d\xi$, et proin attractio elementi $= -\dfrac{\varrho f\varrho. d\varrho. d\Sigma}{(a-\xi)}$. Qua refoluta in tres attractiones partiales axibus coordinatarum x, y, z parallelas atque oppofitas, prima erit $= -f\varrho. d\varrho. d\Sigma$. Hinc defignando integrale $\int f\varrho. d\varrho$ per $F\varrho$, attractio cylindri a bafi $d\Sigma$ vsque ad punctum cuius coordinata prima $= \xi$ in punctum M, fecundum axem coordinatarum x erit $= -(F\varrho - \text{Conft.}) d\Sigma = -(F\varrho - FR) d\Sigma$, fi R fupponitur defignare diftantiam bafis $d\Sigma$ a puncto M. Hinc fequitur, eandem attractionem partialem omnium partium corporis, quae intra cylindrum iacent, fieri

$$= (Fr' - Fr'' + Fr''' - \text{etc.}) d\Sigma$$

$$= -Fr'. ds'. \cos \varrho X' - Fr''. ds''. \cos \varrho X'' - Fr''' ds'''. \cos \varrho X''' - \text{etc.}$$

Extendendo haec ratiocinia ad omnia elementa $d\Sigma$, colligimus

THEOREMA TERTIVM.

Attractio corporis in punctum M, axi coordinatarum x parallela atque oppofita, exhibetur per integrale $-\int Fr. ds. \cos \varrho X$ per totam fuperficiem extenfum.

Prorfus fimili modo manifefto attractio fecundum duas reliquas directiones principales exprimetur per integralia $-\int Fr. ds. \cos \varrho Y$, $-\int Fr. ds. \cos \varrho Z$.

6.

Iam rem alia via aggrediemur. Concipiatur ſuperficies ſphaerica radio $= 1$ circa centrum M deſcripta, atque in elementa infinite parua dispertita. Sit Π punctum huius ſuperficiei ad ſpatiolum $d\Sigma$ in eadem pertinens; ducatur radius $M\Pi$, atque ſi opus eſt vltra ſphaerae ſuperficiem indefinite producatur. Sint P', P'', P''' etc. puncta, in quibus hic radius ſuperficiem corporis noſtri deinceps ſecat, excluſo tamen ipſo puncto M, ſi forte in ipſa ſuperficie iacet. Horum itaque punctorum multitudo par erit vel impar, prout M ſitum eſt extra ſoliditatem corporis vel intra, patetque caſum vbi M in ipſa corporis ſuperficie iacet, annumerari debere vel caſui priori vel poſteriori, prout radius $M\Pi$ ab initio vel a corporis ſoliditate recedit, vel eam intrat. Concipiantur porro rectae a M ad peripheriam ſpatioli $d\Sigma$ ductae, quae formabunt ſuperficiem conicam (ſenſu latiori), atque in ſuperficie corporis noſtri ad puncta P', P'', P''' etc. reſp. ſpatiola ds', ds'', ds''' etc. definient. Denique deſcribantur per puncta P', P'', P''' etc. portiunculae ſuperficierum ſphaericarum e centro M radiis $MP' = r'$, $MP'' = r''$, $MP''' = r'''$ etc., ſintque ſpatiola, quae conus ex illis exſecat, $d\sigma'$, $d\sigma''$, $d\sigma'''$ etc. Omnia haec ſpatiola $d\Sigma$, ds', $d\sigma'$ etc. tamquam poſitiua ſpectabimus. His praemiſſis habemus

$$d\Sigma = \frac{d\sigma'}{r'r'} = \frac{d\sigma''}{r''r''} = \frac{d\sigma'''}{r'''r'''} \text{ etc.}$$

Spatiolum $d\sigma'$ conſiderari poteſt tamquam proiectio ſpatioli ds' in planum, cui recta $P'M$ eſt normalis. Hinc erit $d\sigma' = \pm ds'. \cos MQ'$, ſigno ſuperiori vel inferiori accepto, prout MQ' acutus eſt vel obtuſus: caſus prior locum habet, quoties recta a P' ad M ducta a corpore recedit, i. e. quoties M iacet extra corpus, caſus poſterior vero, quoties recta $P'M$ in P' corpus intrat, i. e. quoties M iacet intra corpus. Perinde erit $d\sigma'' = \mp ds''\cos MQ''$, $d\sigma''' = \pm ds'''. \cos MQ'''$ etc. Unde patet,

I.

I. Si M iaceat extra corpus, haberi

$$ds'.\cos MQ' = + r'r'd\Sigma$$
$$ds''.\cos MQ'' = - r''r''d\Sigma$$
$$ds'''.\cos MQ''' = + r'''r'''d\Sigma$$

etc.

II. Si vero M iaceat intra corpus, fieri

$$ds' \cos MQ' = - r'r'd\Sigma$$
$$ds'' \cos MQ'' = + r''r''d\Sigma$$
$$ds''' \cos MQ''' = - r'''r'''d\Sigma$$

etc.

In caſu I itaque erit (propter aequationum multitudinem parem)

$$\frac{ds'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{ds''.\cos MQ''}{r''r''} + \frac{ds'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.} = 0$$

in caſu II vero (propter aequationum multitudinem imparem)

$$\frac{ds'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{ds''.\cos. MQ''}{r''r''} + \frac{ds'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.} = -d\Sigma$$

Tractando eodem modo omnia elementa $d\Sigma$, et ſummando, ad laeuam manifeſto habebimus integrale $\int\frac{ds.\ \cos MQ}{rr}$ per totam corporis ſuperficiem extenſum, ad dextram vero in caſu priori 0, in poſteriori aream integram ſuperficiei ſphaericae radio $= 1$ deſcriptae negatiue ſumtam, i. e. -4π, denotante π ſemicircumferentiam circuli, cuius radius $= 1$.

De caſu, vbi M in ipſa corporis ſuperficie collocatur, ſeorſim dicendum eſt. Concipiatur planum tangens ſuperficiem corporis in puncto M, quod ſuperficiem ſphaericam in duo hemiſphaeria aequalia dirimet, alterum ab eadem parte plani, a qua eſt ſoliditas corporis in M, alterum a parte oppoſita. Reſpectu omnium elementorum $d\Sigma$, quae ſunt in hemiſphaerio priori, punctum M conſiderandum erit tamquam punctum internum, pro reliquis tamquam externum. Hinc patet, e ſummatione omnium

ds'.

$$\frac{ds'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{ds''.\cos MQ''}{r''r''} + \frac{ds'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.}$$

ptodire tantummodo aream dimidiam sphaerae negatiue sumendam. Ita stabilimus

THEOREMA QVARTVM.

Integrale $\int \frac{ds.\cos M\Phi}{rr}$ *per totam corporis superficiem extensum fit vel* $= 0$, *vel* $= -2\pi$, *vel* $= -4\pi$, *prout M iacet extra corpus, vel in eius superficie, vel intra corpus.*

Ceterum per eadem ratiocinia demonstratur, generaliter integrale $\int \frac{Pds.\cos MQ}{rr}$ in casu primo euanescere, si P denotet functionem quamcunque rationalem quantitatum $\cos MX$, $\cos MY$, $\cos MZ$.

7.

Volumen spatii conici a vertice vsque ad punctum P', P'', P''' etc. resp. est $= \frac{1}{3} r' d\sigma'$, $\frac{1}{3} r'' d\sigma''$, $\frac{1}{3} r''' d\sigma'''$ etc., siue $= \pm \frac{1}{3} r' ds'.\cos MQ'$, $\frac{1}{3} r'' ds''.\cos MQ''$, $\pm \frac{1}{3} r''' ds'''.\cos MQ'''$ etc., signis superioribus vel inferioribus valentibus, prout M iacet extra vel intra corpus. In casu priori autem partem soliditatis corporis constituunt partes coni a P' vsque ad P'', a P''' vsque ad P^{IV} etc., in posteriori vero partes coni a M vsque ad P', a P'' vsque ad P''' etc. In vtroque igitur casu pars corporis ea, quae iacet intra conum basi $d\Sigma$ insistentem, fit

$$-\tfrac{1}{3}(r'ds'.\cos MQ' + r''ds''.\cos MQ'' + r'''ds'''.\cos MQ''' + \text{etc.})$$

tractando eodem modo cuncta elementa $d\Sigma$, et summando, obtinemus

THEOREMA QVINTVM.

Volumen corporis integri aequale est integrali $-\frac{1}{3}\int r\,ds.\cos MQ$ *per totam corporis superficiem extenso.*

8.

Iam supponamus, corpus esse vniformiter densum, singulaque eius elementa exercere attractionem in punctum M alicui functioni distantiae proportionalem, ita vt denotante ϱ distantiam elementi a puncto attracto, attractio exprimatur per elementi volumen in $f\varrho$. Concipiatur primo conus noster basi $d\Sigma$ insistens totus materia plenus, atque per superficies sphaericas infinite sibi proximas e centro M descriptas in elementa infinita dispertitus. Tale elementum, ad sphaeram cuius radius $= \varrho$, exprimetur per $\varrho\varrho d\varrho.\, d\Sigma$, adeoque vis qua agit in M, per $d\Sigma\, \varrho\varrho f\varrho.\, d\varrho$. Denotando itaque integrale $\int \varrho\varrho f\varrho.\, d\varrho$ per $\Phi\varrho$, patet $d\Sigma.\, (\Phi\varrho - \Phi o)$ exprimere attractionem partis coni a vertice vsque ad distantiam ϱ in punctum M, siue generaliter $d\Sigma.\, (\Phi\varrho' - \Phi\varrho)$ attractionem coni inter distantias a vertice ϱ et ϱ'. Ab omnibus itaque partibus corporis nostri intra conum iacentibus attrahetur punctum M in directione $M\Pi$ vi, quae exprimitur per

$$d\Sigma.\, (-\Phi r' + \Phi r'' - \Phi r''' + \text{etc.})$$

quoties M iacet extra corpus, vel per

$$d\Sigma\, (-\Phi o + \Phi r' - \Phi r'' + \Phi r''' - \text{etc.})$$

quoties M iacet intra corpus, siue

in casu priori per

$$-\frac{ds'.\,\Phi r'.\cos MQ'}{r'r'} - \frac{ds''.\,\Phi r''.\cos MQ''}{r''r''} - \frac{ds'''.\,\Phi r'''.\cos MQ'''}{r'''r'''}$$

$-$ etc.

in casu posteriori vero per eandem formulam adiecta parte $- d\Sigma.\, \Phi o$.

Multipli-

Multiplicando hanc expressionem per cos MX, habebimus vim, qua partes corporis intra conum sitae attrahunt punctum in directione axi coordinatarum x parallela atque opposita. Hinc vis, qua corpus integrum agit in eadem directione, exprimetur per integrale $-\int \frac{ds.\,\Phi r.\,\cos MQ.\,\cos MX}{rr}$, per totam corporis superficiem extensum, siquidem punctum attractum iacet extra corpus, sed adiicere adhuc oportet integrale $-\Phi o. \int d\Sigma.\, \cos MX$ per totam superficiem sphaericam extensum, quoties M iacet intra corpus. Nullo porro negotio perspicitur, in casu eo vbi M iaceat in corporis superficie, adiiciendum quidem esse idem integrale $-\Phi o. \int d\Sigma.\, \cos MX$, sed per dimidiam tantummodo sphaerae superficiem extensum, et quidem per hemisphaerium id, quod definitur plano corporis superficiem in M tangente atque ab eadem plani parte iacet, a qua est soliditas corporis in puncto M. Vt valorem huius integralis determinemus, concipiamus solidum intra hemisphaerium istud atque planum inclusum. Denotet θ indefinite angulum inter rectam superficiei huius solidi normalem extrorsumque directam atque rectam axi coordinatarum x parallelam. Hinc per Theorema Primum integrale $\int ds.\,\cos\theta$ per *totam* solidi superficiem extensum euanescit, vnde si integrale per solam partem planam superficiei extensum supponitur $= J$, integrale per superficiei partem curuam debebit esse $= -J$. Sed in parte curua ds conuenit cum nostro $d\Sigma$, θ vero est $= 180° - MX$. Hinc patet, integrale $-\int d\Sigma.\,\cos MX$, per hemisphaerium extensum fieri $= -J$. In parte plana autem superficiei manifesto θ est constans, atque aequalis valori ipsius MX in puncto M, vnde J aequalis erit producto cosinus huiusce anguli in aream plani, quae fit $= \pi$. Hinc colligitur, integrale $-\Phi o. \int d\Sigma.$ cos MX, per hemisphaerium quod supra definiuimus extensum, fieri $= -\pi\,\Phi o.\,\cos MX$, sumto pro MX valore in puncto M. Prorsus eodem modo valor integralis $-\Phi o \int d\Sigma.\,\cos MX$ per hemis-

 phaerium

phaerium alterum extenſum inuenitur $= + \pi\,\Phi o.\cos MX$, vnde integrale per totam ſphaeram fit $= o$. Ex his omnibus colligimus

THEOREMA SEXTVM.

Attractio corporis in punctum M, axi coordinatarum x parallela et oppoſita, exhibetur per integrale

$$-\int \frac{ds.\,\Phi r.\cos MQ.\cos MX}{rr}$$

per totam ſuperficiem extenſum, ſiue M iaceat extra corpus, ſiue intra, ſed adiecta parte $-\pi\,\Phi o.\cos MX$, *quoties M iacet in ipſa ſuperficie, vbi pro MX accipiendus eſt valor definitus, quem habet in M.*

Manifeſto vires ſecundum directiones axibus coordinatarum y, z parallelas atque oppoſitas perinde exprimentur per integralia

$$-\int \frac{ds.\,\Phi r.\cos MQ.\cos MY}{rr},\quad -\int \frac{ds.\,\Phi r.\cos MQ.\cos MZ}{rr},$$

quibus adiicere oportet $-\pi\,\Phi o.\cos MY$, $-\pi\,\Phi o.\cos MZ$ (ſumtis pro angulis valoribus definitis in M), quoties M iacet in corporis ſuperficie.

Ceterum facile perſpicitur, tres vires $-\pi\,\Phi o.\cos MX$, $-\pi\,\Phi o.\cos MY$, $-\pi\,\Phi o.\cos MZ$ aequiualere vnicae $= -\pi\,\Phi o$ ipſi ſuperficiei normali introrſumque directae.

Manifeſto euolutione integralis $-\Phi o.\int d\Sigma.\cos MX$ ſuperſedere potuiſſemus, ſi functio f ita comparata eſt, vt liceat ſtatuere $\Phi o = o$; ſed maluimus disquiſitionem omni generalitate perſequi. Quoties autem attractio cubo altiorine poteſtati diſtantiae proportionalis ſupponitur, patet, illud non licere, ſed neceſſario fieri $\Phi o = -\infty$, vnde ſequitur, in tali ſuppoſitione punctum in corporis ſuperficie poſitum vi infinita verſus ſolidum premi.

9.

Per methodos hactenus explicatas integralia, quae per totum orporis volumen extendi debuiſſent (integralia tripla), ad talia re- uximus, quae tantummodo per corporis ſuperficiem ſunt exten- enda, et quidem duplici modo. Indoles ſuperficiei exprimitur per equationem inter coordinatas x, y, z, i. e. per aequationem $W = 0$, enotante W functionem variabilium x, y, z, quam ab omni irratio- alitate liberam ſupponere licet. Prodeat e differentiatione fun- ionis W

$$dW = Tdx + Udy + Vdz$$

nſtatque, T, U, V reſp. proportionales eſſe coſinibus angulorum ctae, quae ſuperficiei normalis eſt, cum rectis axibus coordinata- m x, y, z parallelis, i. e. angulorum QX, QY, QZ. Hinc quidem lligitur, eſſe

$$\cos QX = \frac{\pm T}{\sqrt{(TT + UU + VV)}},$$

$$\cos QY = \frac{\pm U}{\sqrt{(TT + UU + VV)}}$$

$$\cos QZ = \frac{\pm V}{\sqrt{(TT + UU + VV)}}$$

ambiguum manet, vtrum ſigna ſuperiora, an inferiora adoptare rteat. Quod vt decidamus, capiamus in recta PQ ſuperficiei normali *extrorſum*que directa punctum P' ipſi P infinite proxi- n, ſitque diſtantia $PP' = dw$. Erunt itaque coordinatae puncti eſp.

$$x + dw. \cos QX = x + dx$$
$$y + dw. \cos QY = y + dy$$
$$z + dw. \cos QZ = z + dz$$

que incrementum valoris functionis W inde a puncto P (vbi $= 0$) vsque ad punctum P'

$= dw$

$$= d\omega . (T \cos QX + U \cos QY + V \cos QZ)$$
$$= \pm d\omega . \sqrt{(TT + UU + VV)}$$

Hinc patet, ſigna ſuperiora valere, ſi recedendo a corporis ſoliditate functio W nanciſcitur valorem poſitiuum, et proin negatiuum ingrediendo corporis ſoliditatem, contra ſigna inferiora valere in caſu oppoſito. Reuera quum ſuperficies noſtra tum corporis ſoliditatem a reliquo ſpatio vacuo ſeparet, tum ſpatii partes eas vbi W poſitiuum valorem obtinet, ab iis vbi valor functionis W fit negatiuus, generaliter loquendo *vel* extra corpus valor functionis W poſitiuus erit, intra negatiuus, in quo caſu ſigna ſuperiora accipienda erunt, *vel* functio W negatiua erit extra, poſitiua intra corpus, in quo caſu ſigna inferiora valebunt.

Coſinus angulorum reliquorum, quibus in formulis noſtris opus habemus, adhuc facilius euoluuntur. Habemus ſcilicet

$a = x + r \cos MX$

$b = y + r \sin MY$

$c = z + r \sin MZ$

vnde $r = \sqrt{((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)}$

$$\cos MX = \frac{a-x}{r}$$

$$\cos MY = \frac{b-y}{r}$$

$$\cos MZ = \frac{c-z}{r}$$

Denique per theorema ſatis notum fit

$\cos MQ = \cos MX . \cos QX + \cos MY . \cos QY + \cos MZ . \cos QZ$

ſiue

$$\cos MQ = \pm \frac{T(a-x) + U(b-y) + V(c-z)}{r\sqrt{(TT + UU + VV)}}$$

10.

Iam vt integratio expreſſionum differentialium per totam ſu-perficiem abſolui poſſit, has expreſſiones ita transmutare oportet, vt duas tantummodo variabiles contineant. Hoc fieri quidem poteſt eliminando vnam e variabilibus x, y, z adiumento aequationis $W = o$: ſed plerumque hoc modo formulae minus tractabiles prodeunt. Praeſtat itaque, duas nouas indeterminatas p, q introdu-cere, ita vt tum x, tum y, tum z tamquam functiones harum inde-terminatarum conſiderare oporteat.

Simulac igitur ipſis p, q valores determinati tribuuntur, etiam y, z determinatae erunt, i. e. illis punctum determinatum in cor-poris ſuperficie reſpondebit. Haec mutua correlatio clarius ob ocu-s ponetur, ſi planum indefinitum concipiamus, cuius ſingula ncta per coordinatas rectangulares p, q exhibeantur. Cuiuis ita-e puncto plani reſpondebit punctum in ſuperficie corporis et qui-m vnicum tantum, ſi res ita inſtructa eſt, vt x, y, z ſint functio-s vniformes indeterminatarum p, q. Quodſi vice verſa etiam per y, z plene et abſque ambiguitate determinantur p et q, manifeſto uis puncto ſuperficiei corporis vnicum tantum plani punctum re-ndebit, planumque in hoc caſu vndique in infinitum porrigi et, quo integram corporis ſuperficiem exhauriat. Alioquin au-plani partem tantummodo conſiderare oportebit, limitibus fini-vel infinitis deſcriptam, quae corporis ſuperficiem quaſi reprae-abit. Concipiatur planum per infinitas rectas tum lineae abſciſ-m parallelas tum ipſi normales in elementa rectangula diui-: huiusmodi elementum, inter puncta quorum coordinatae ſunt

$$q$$

$$+ dp, q$$

$$q + dq$$

$$+ dp, q + dq$$

ntum, erit $= dp . dq$, reſpondebitque elemento parallelogram-matico

matico in superficie corporis contento inter quatuor puncta, quorum coordinatae resp. erunt

I. $x, \quad y, \quad z$

II. $x + \lambda dp, \; y + \mu dp, \; z + \nu dp$

III. $x + \lambda' dq, \; y + \mu' dq, \; z + \nu' dq$

IV. $x + \lambda dp + \lambda' dq, \; y + \mu dp + \mu' dq, \; z + \nu dp + \nu' dq,$

si supponimus esse

$$dx = \lambda dp + \lambda' dq$$
$$dy = \mu dp + \mu' dq$$
$$dz = \nu dp + \nu' dq$$

Proiectiones huius areae, quam statuimus $= ds$, in tria plana axibus coordinatarum x, y, z normalia, facile inueniuntur resp. $=$

$$\pm (\mu\nu' - \nu\mu')\, dp.\, dq$$
$$\pm (\nu\lambda' - \lambda\nu')\, dp.\, dq$$
$$\pm (\lambda\mu' - \mu\lambda')\, dp.\, dq$$

vnde per theorema satis notum ipsa elementi area erit

$$= dp.\, dq \sqrt{((\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2)}$$

Hinc patet, singula integralia in sex nostris theorematibus prolata, ad formam talem reduci $\int S dp.\, dq$, vbi S vel explicite vel implicite sit functio duarum indeterminatarum p, q, integrationemque vel per totum planum infinitum extendendam esse, vel per eam plani partem, quae superficiem integram corporis nostri quasi repraesentat. Integratio ipsa autem modo his modo illis artificiis absoluetur, de quibus regulae generales dari nequeunt.

Ceterum adhuc obseruamus, quum substitutis pro x, y, z valoribus per p, q expressis, functio W necessario fieri debeat identice $= 0$, etiam identice i. e. independenter a valoribus ipsarum dp, dq fieri debere

$$0 = (\lambda T + \mu U + \nu V)\, dp + (\lambda' T + \mu' U + \nu' V)\, dq$$

siue haberi

λT

$$\lambda T + \mu U + \nu V = 0$$

$$\lambda' T + \mu' U + \nu' V = 0$$

Hinc sequitur, quantitates $\mu\nu' - \nu\mu'$, $\nu\lambda' - \lambda\nu'$, $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ resp. ipsis T, U, V, siue cosinibus angulorum QX, QY, QZ proportionales euadere, quod iam e supra dictis, sed remanente signorum ambiguitate, colligere licuerat.

11.

Ab his disquisitionibus generalibus ad corpora sphaeroidica elliptica descendimus, quorum caussa illae fuerant susceptae. Initio abscissarum in corporis centro sumto, semiaxibusque per A, B, C designatis, aequatio superficiei erit

$$\frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} = 1$$

Statuemus itaque $W = \frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} - 1$, vnde patet, pro omnibus punctis intra corpus W obtinere valores negatiuos, positiuos autem pro omnibus punctis extra corpus. Porro erit $T = \frac{2x}{AA}$, $U = \frac{2y}{BB}$, $V = \frac{2z}{CC}$; statuendo itaque

$$\sqrt{\left(\frac{xx}{A^4} + \frac{yy}{B^4} + \frac{zz}{C^4}\right)} = \psi,$$

erit

$$\cos QX = \frac{x}{\psi AA}, \quad \cos QY = \frac{y}{\psi BB}, \quad \cos QZ = \frac{z}{\psi CC}$$

$$\cos QM = \frac{1}{\psi r}\left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right)$$

12.

Iam introducamus duas indeterminatas p, q tales vt fiat

$x = A \cos p$

$y = B \sin p . \cos q$

$z = C \sin p . \sin q$

 Facile

Facile perſpicietur, totam ſphaeroidis ſuperficiem ſic exhauriri, ſi p extendatur a o vsque ad 180°, q vero a o vsque ad 360°. Porro habebimus

$\lambda = -A \sin p,\ \lambda' = 0$

$\mu = B \cos p.\ \cos q,\ \mu' = -B \sin p.\ \sin q$

$\nu = C \cos p.\ \sin q,\ \nu' = C \sin p.\ \cos q$

$$\mu\nu' - \nu\mu' = BC \cos p.\ \sin p = ABC \sin p.\ \frac{x}{AA}$$

$$\nu\lambda' - \lambda\nu' = AC \sin p^2.\ \cos q = ABC \sin p.\ \frac{y}{BB}$$

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = AB \sin p^2.\ \sin q = ABC \sin p.\ \frac{z}{CC}$$

Hinc quoniam $\sin p$ intra limites, quos hic conſideramus, vbique ſit quantitas poſitiua, ſtatuere oportet

$$ds = dp.\ dq.\ ABC\ \psi.\ \sin p$$

Applicando has formulas ad theorema ſecundum, fit corporis volumen ſeu (ſtatuendo denſitatem = 1) maſſa

$$= \iint dp.\ dq.\ ABC.\ \cos p^2.\ \sin p$$

ſiue integrando primo ſecundum q

$$= 2\pi \int dp.\ ABC.\ \cos p^2.\ \sin p = \tfrac{1}{2}\pi ABC \int dp.\ (\sin p + \sin 3p)$$

quod integrale a $p = 0$ vsque ad $p = 180°$ eſt extendendum. Hinc prouenit $\frac{4}{3}\pi ABC$, vti aliunde conſtat.

13.

Ad determinandam attractionem, quam ſphaerois exercet in punctum quodcunque, ſi attractio cuiusuis elementi quadrato diſtantiae a puncto attracto reciproce proportionalis ſupponitur, habemus $fr = \frac{1}{rr}$, $Fr = -\frac{1}{r}$, $\Phi r = r$. Sit attractio ſphaeroidis integri ſecundum directionem axi coordinatarum x parallelam atque oppoſitam $= X$, ſtatuaturque $X = ABC\xi$. Erit itaque, per theorema tertium,

$$X = \iint dp.\ dq\ \frac{BCx \sin p}{rA} = \iint dp.\ dq\ \frac{BC \cos p.\ \sin p}{r}$$

adeo-

adeoque

$$[1]\quad \xi = \iint \frac{dp.\, dq.\, \cos p.\, \sin p}{Ar},$$

Perinde obtinemus, per theorema sextum,

$$[2]\quad \xi = -\iint \frac{dp.\, dq.\, \sin p}{r^3} . (a-x) \left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right)$$

Denique theorema quartum nobis suppeditat

$$[3]\quad \iint \frac{dp.\, dq.\, \sin p}{r^3} \left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right) = 0$$

$$\text{vel} = -\frac{4\pi}{ABC},$$

prout punctum M iacet vel extra corpus, vel intra corpus.

Iam quantitates A, B, C tamquam valores particulares trium variabilium α, β, γ consideramus, ita comparatas, vt $\alpha\alpha - \beta\beta$, $\alpha\alpha - \gamma\gamma$ sint constantes. Ita ξ spectari poterit tamquam functio variabilium α, β, γ seu potius vnius ex ipsis: variationes simultaneas quantitatum $\xi, \alpha, \beta, \gamma$ per characteristicam δ distinguemus. Facile concluditur ex aequatione [1], crescentibus α, β, γ in infinitum, ξ vltra omnes limites decrescere, quum manifesto vel valor minimus ipsius r vltra omnes limites crescat. Statuere itaque oportet $\xi = 0$ pro $\alpha = \infty$. Differentiando aequationem [1] ita exhibitam

$$\alpha\xi = \iint \frac{dp.\, dq.\, \cos p.\, \sin p}{r}$$

secundum characteristicam δ, prodit

$$\alpha\delta\xi + \xi\delta\alpha = -\iint \frac{dp.\, dq.\, \cos p.\, \sin p.\, \delta r}{rr}$$

Et habemus

$$r\delta r = -(a-x)\,\delta x - (b-y)\,\delta y - (c-z)\,\delta z$$

$$= -(a-x)\cos p.\, \delta\alpha - (b-y)\sin p \cos q.\, \delta\beta - (c-z)\sin p \sin q.\, \delta\gamma$$

$$= -(a-x)x.\, \frac{\delta\alpha}{\alpha} - (b-y)y.\, \frac{\delta\beta}{\beta} - (c-z)z.\, \frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

$$= -\alpha\delta\alpha.\left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha} + \frac{(b-y)y}{\beta\beta} + \frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right)$$

 (propter

(propter $\alpha\delta\alpha - \beta\delta\beta = 0$, $\alpha\delta\alpha - \gamma\delta\gamma = 0$): hinc fit

$$\alpha\delta\xi + \xi\delta\alpha = \delta\alpha \iint \frac{dp.\,dq.\,\alpha \sin p}{r^3} \left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha} + \frac{(b-y)y}{\beta\beta} + \frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right)$$

Hinc subtrahendo aequationem [2], in $\delta\alpha$ multiplicatam, postquam A, B, C in α, β, γ mutatae sunt, fit

$$\alpha\delta\xi = \delta\alpha. \iint \frac{dp.\,dq.\,a \sin p}{r^3} \left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha} + \frac{(b-y)y}{\beta\beta} + \frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right)$$

Huius aequationis pars ad dextram per aequ. [3] fit vel $= 0$ vel $= -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha\beta\gamma}$, prout M iacet extra vel intra corpus, ita vt fiat in casu priori

[4] $\delta\xi = 0$

in posteriori autem

[5] $\delta\xi = -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha\alpha\beta\gamma}$

Aequatio [4] protinus ostendit, ξ esse constantem, siue attractionem X massae proportionalem pro omnibus ellipsoidibus, in quibus $\alpha\alpha - \beta\beta$, $\alpha\alpha - \gamma\gamma$ sint quantitates constantes, i. e., quarum tres sectiones principales sint ellipses ex iisdem focis descriptae, quamdiu punctum attractum extra sphaeroidem iaceat. Quam conclusionem, quum omni rigore vera sit, quantumuis proxime sphaeroidis superficies ad punctum attractum accedat, necessario etiam ad sphaeroidem ipsam extendere licebit, cuius superficies per ipsum punctum attractum transit.

Problema itaque de attractione sphaeroidis in punctum quodcunque externum determinanda, reducitur ad duo alia problemata, scilicet primo ad determinationem dimensionum alius sphaeroidis ex iisdem quibus sphaerois proposita focis descriptae punctumque attractum transeuntis, secundo ad problema de attractione sphaeroidis in punctum in ipsius superficie positum. Problema prius pendet a solutione aequationis cubicae, quam semper radicem realem vnicam

inuoluere

inuoluere facile demonstratur, cuique hic immorari superfluum videtur. Vt vero problema alterum soluamus, consideremus casum alterum, vbi punctum attractum iacet intra corpus. Quum sit $\mathfrak{C}\mathfrak{C} = aa + BB - AA$, $\gamma\gamma = aa + CC - AA$, substituemus hos valores in aequatione 5, simulque faciemus $\frac{A}{a} = t$. Hinc emergit

$$\delta\xi = \frac{4a\pi tt\delta t}{A^3 \surd ((1 - (1 - \frac{BB}{AA})tt)(1 - (1 - \frac{CC}{AA}) tt)}$$

siue restituendo characteristicam d, et integrando

$$\xi = \frac{4a\pi}{A^3} \int \frac{ttdt}{\surd ((1 - (1 - \frac{BB}{AA}) tt) (1 - (1 - \frac{CC}{AA}) tt)}$$

quod integrale ita sumendum est, vt euanescat pro $t = 0$, ac dein, pro sphaeroide determinata cuius semiaxes sunt A, B, C, extendendum vsque ad $t = 1$. Habemus itaque

$$[6] \quad X = \frac{4a\pi BC}{AA} \int \frac{ttdt}{\surd ((1 - (1 - \frac{BB}{AA}) tt) (1 - (1 - \frac{CC}{AA}) tt)}$$

integratione a $t = 0$ vsque ad $t = 1$ extensa. Manifesto attractiones axibus coordinatarum y, z, parallelae hinc sponte deriuantur, si A cum b, B vel cum c, C permutantur.

Haec itaque formula suppeditat attractionem omnium punctorum intra sphaeroidem, et quum rigorose sit vera, quantumuis proximum sit punctum attractum ipsi sphaeroidis superficiei, etiam que ad puncta in superficie posita valebit. Ad quam quum attractio punctorum externorum iam reducta sit, problema iam complete est solutum.

Aequatio [6] praeterea docet, pro puncto interno attractionem omnium sphaeroidum similium similiterque positarum prorsus idem esse. Quodsi itaque huiusmodi sphaerois in plura strata di-

visa

visa concipiatur, quorum superficies internae et externae superficiei sphaeroidis sint similes similiterque positae, manifesto singula strata punctum attractum circumuoluentia ad attractionem in hoc punctum nihil conferent, ita vt tantummodo restet attractio nuclei interioris, cuius superficies per ipsum punctum transit.

14.

De ipsa integratione formulae [6] non opus est prolixe disserere. Constat scilicet, eam a transscendentibus pendere, circulo logarithmisque altioribus, si omnes A, B, C sint inaequales: in hoc itaque casu ad series confugiemus, quae tanto citius conuergent, quo minus sphaerois a sphaera discrepat. Si vero duae quantitatum A, B, C sunt aequales, e. g. $A = B$, in quo casu sphaerois orta erit per reuolutionem circa axem $= 2C$, erit

$$\mathrm{X} = \frac{4\pi aC}{A}\int\frac{tt\,dt}{\sqrt{(1-(1-\frac{CC}{AA})\,tt)}}$$

$$= \frac{2\pi a}{\sin\varphi^3}\cos\varphi\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi)$$

statuendo $\frac{C}{A} = \cos\varphi$, vel $\sqrt{(1-\frac{CC}{AA})} = \sin\varphi$, si $C < A$

aut

$$\mathrm{X} = \frac{2\pi aCC}{CC-AA} - \frac{2\pi aAAC}{(CC-AA)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{C+\sqrt{(CC-AA)}}{A}$$

si $C > A$.

Attractio in directione coordinatis y parallela et opposita, prodit mutando in his formulis a in b; vnde patet has duas vires aequiualere vnicae, cuius directio axi $2C$ normalis est, cuiusque intensitas inuenitur, si in formula modo tradita a in distantiam puncti attracti ab hoc axe mutatur.

Attractio

Attractio denique in directione coordinatis z parallela et opposita i. e. ad aequatorem normali, fit in casu, vbi $B = A$,

$$= \frac{4\pi c AA}{CC} \int \frac{ttdt}{1 - (1 - \frac{AA}{CC})\, tt}$$

vnde eruitur, si $C < A$, ponendo vt supra $\frac{C}{A} = \cos\phi$,

$$= \frac{4\pi c \cos\phi}{\sin\phi^3} (\operatorname{tang}\phi - \phi)$$

i vero $C > A$, prodit

$$\frac{4\pi c AAC}{(CC - AA)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{C + \sqrt{(CC - AA)}}{A} - \frac{4\pi c AA}{CC - AA}$$

'andem, si omnes tres A, B, C sunt aequales, i. e. si corpus est phaera, attractiones secundum tres directiones principales fiunt

$$\tfrac{4}{3}\pi a,\ \tfrac{4}{3}\pi b,\ \tfrac{4}{3}\pi c$$

ė. identicae cum iis, quas nucleus sphaericus, in cuius superficie inctum attractum iacet, exerceret, si ipsius massa in centro esset ncentrata. Hinc etiam sponte sequitur, puncta *externa* a sphaera rinde attrahi, ac si eius massa tota esset in centro, vti Newton imus docuerat.

Additamentum.

Postquam haecce iam perscripta essent, innotuit, indicante ill. place, commentatio egregia cl. *Ivory* in *Philosophical Transactions* 4. 1809, vbi idem argumentum per methodum ab iis quibus erant ill. Laplace et Legendre prorsus diuersam tractatur. Summa antia ille geometra attractionem puncti externi ad attractionem cti interni reducere docuit, i. e. problematis partem, quae semper difficiliori habita est, ad faciliorem. Methodus autem, per a hanc alteram partem tractauit, longe magis complicata est,

partimque

partimque perinde vt methodus qua ill. Laplace pro punctis externis vſus erat, conſiderationi ſerierum infinitarum non ſemper conuergentium innititur, quam vtique euitare licuiſſet. Caeterum haec ſolutio clar. Ivory, quae obiter ſpectata quandam ſimilitudinis ſpeciem cum noſtra prae ſe ferre videri poſſet, propius examinata principiis *omnino diuerſis* inniti inuenietur, nec fere quidquam vtrique ſolutioni commune eſt, niſi vſus indeterminatarum a nobis per p, q denotatarum.